Aufgabe F20T2A1

Für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ seien a_0, a_1, a_2 die Koeffizienten des Polynoms

$$f(X) := (X - \lambda_1) \cdot (X - \lambda_2) \cdot (X - \lambda_3) = X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[x].$$

Ferner sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

die sogenannte Begleitmatrix zu den gegebenen Zahlen. Zeigen Sie:

(a) Die Eigenwerte von A sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

(b) Die Jordansche Normalform von A hat für jeden Eigenwert λ genau ein Jordan-Kästchen.

Hinweis/Kommentar:

Für Teil (a) genügt es zu überprüfen, dass das charakteristische Polynom χ_A von A mit f übereinstimmt; dies ist eine einfache Rechnung. Für Teil (b) überlegen Sie sich zunächst, dass die Behauptung erfüllt ist, wenn das Minimalpolynom μ_A von A mit χ_A übereinstimmt. Dies ist ganz sicher dann der Fall, wenn die Matrizen E, A und A^2 im $\mathbb{C}$-Vektorraum der komplexen 3×3-Matrizen linear unabhängig sind, wobei E die Einheitsmatrix bezeichnet (warum?). Die lineare Unabhängigkeit kann anhand der ersten Spalten der drei Matrizen überprüft werden; es ist also nicht notwendig, die Matrix A^2 vollständig auszurechnen.