Aufgabe F20T2A1

Für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ seien a_0, a_1, a_2 die Koeffizienten des Polynoms

$$f(X) := (X - \lambda_1) \cdot (X - \lambda_2) \cdot (X - \lambda_3) = X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[x].$$

Ferner sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

die sogenannte Begleitmatrix zu den gegebenen Zahlen. Zeigen Sie:

(a) Die Eigenwerte von A sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

(b) Die Jordansche Normalform von A hat für jeden Eigenwert λ genau ein Jordan-Kästchen.

Lösung:

zu (a) Wir überprüfen, dass f mit dem charakteristischen Polynom χ_A von A übereinstimmt. Bezeichnen wir die Einheitsmatrix in $\mathbb{C}^{3\times 3}$ mit E, dann gilt

$$\chi_A \quad = \quad \det(xE - A) \quad = \quad \begin{vmatrix} x & 0 & a_0 \\ -1 & x & a_1 \\ 0 & -1 & x + a_2 \end{vmatrix} \quad =$$

$$x^2(x + a_2) + 0 + a_0 - 0 - (-a_1 x) - 0 \quad = \quad x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Die Eigenwerte von A sind laut Vorlesung genau die Nullstellen von $\chi_A = f$, und die Zerlegung von f in Linearfaktoren zeigt, dass dies genau die Werte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind.

zu (b) Wir zeigen zunächst, dass die Matrizen E, A, A^2 im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^{3\times 3}$ ein linear unabhängiges System bilden. Die erste Spalte von E, A bzw. A^2 ist jeweils der Einheitsvektor e_1, e_2 bzw. e_3. Bei E und A kann dies direkt abgelesen werden, bei A^2 erhält man das Resultat durch Multiplikation der Matrix A mit ihrer ersten Spalte:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad = \quad e_3.$$

(Es ist nicht notwendig, die Matrix A^2 vollständig zu berechnen.) Seien c_0, c_1, c_2 mit $c_0 E + c_1 A + c_2 A^2 = 0$ vorgegeben. Durch Vergleich der ersten Spalten auf beiden Seiten erhält man $c_0 e_1 + c_1 e_2 + c_2 e_3 = 0$, und daraus folgt $c_0 = c_1 = c_2 = 0$, weil $\{e_1, e_2, e_3\}$ ein linear unabhängiges System in $\mathbb{C}^3$ ist. Damit ist die linear Unabhängigkeit von $\{E, A, A^2\}$ nachgewiesen.

Aus der linearen Unabhängigkeit von $\{E, A, A^2\}$ folgt, dass das Minimalpolynom μ_A von A mindestens vom Grad 3 ist. Wäre nämlich μ_A vom Grad 1 oder 2, $\mu_A = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$ mit $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, dann würde $c_2 A^2 + c_1 A + c_0 = \mu_A(A) = 0$ folgen, im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt $\chi_A(A) = 0$; wegen $\mathrm{grad}(\mu_A) \geq 3 = \mathrm{grad}(\chi_A)$ folgt daraus $\mu_A = \chi_A$.

Sei nun $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und $a \in \{1, 2, 3\}$ dessen algebraische Vielfachheit. Dann ist a zugleich die Vielfachheit von λ als Nullstelle von μ_A. Laut Vorlesung ist die algebraische Vielfachheit von λ die Summe der Größen sämtlicher Jordanblöcke zum Eigenwert λ in der Jordanschen Normalform. Die Vielfachheit von a als Nullstelle von μ_A ist dagegen die Größe des größten Jordanblocks zum Eigenwert λ. Da beide Werte gleich a sind, folgt daraus, dass nur ein Jordanblock zum Eigenwert λ existiert.