

Aufgabe F20T1A5

Ein n -Tupel (a_1, a_2, \dots, a_n) von ganzen Zahlen heiße *hübsch*, wenn $a_i a_j + 2$ eine Quadratzahl ist für alle $1 \leq i < j \leq n$. Zeigen Sie:

- (a) Es gibt hübsche Tripel.
- (b) Wenn ein Quadrupel hübsch ist, dann ist keine der Zahlen a_j ($j = 1, \dots, 4$) durch 4 teilbar.
- (c) Es gibt keine hübschen Quadrupel.

Hinweis/Kommentar:

Teil (a) ist reines Ausprobieren; versuchen Sie, ein hübsches Tripel (a_1, a_2, a_3) mit so kleinen Zahlen wie möglich zu finden. Für Teil (b) beachten Sie, dass Quadratzahlen immer kongruent zu 0 oder 1 modulo 4 sind. Bei Teil (c) ist die entscheidende Beobachtung, dass es in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ nur drei von $\bar{0}$ verschiedene Restklassen gibt, die Einträge eines hübschen Quadrupels (a_1, a_2, a_3, a_4) aber in lauter verschiedenen Restklassen liegen müssten. Nehmen Sie an, dass zwei der Einträge in derselben Restklasse liegen, und zeigen Sie, dass dies mit der Annahme eines hübschen Tupels unvereinbar ist.