Aufgabe F20T1A5

Ein n-Tupel $(a_1, a_2, ..., a_n)$ von ganzen Zahlen heiße *hübsch*, wenn $a_i a_j + 2$ eine Quadratzahl ist für alle $1 \le i < j \le n$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt hübsche Tripel.

(b) Wenn ein Quadrupel hübsch ist, dann ist keine der Zahlen a_j $(j = 1, ..., 4)$ durch 4 teilbar.

(c) Es gibt keine hübschen Quadrupel.

Lösung:

zu (a) Das Tripel $(a_1, a_2, a_3) = (1, 2, 7)$ ist hübsch, denn $a_1a_2 + 2 = 4$, $a_1a_3 + 2 = 9$ und $a_2a_3 + 2 = 16$ sind alles Quadratzahlen.

zu (b) Nehmen wir an, (a_1, a_2, a_3, a_4) ist ein hübsches Quadrupel mit der Eigenschaft, dass eines der Elemente a_i (mit $i \in \{1, 2, 3, 4\}$) durch 4 teilbar ist. Betrachten wir zunächst den Fall $i = 1$. Nach Voraussetzung ist $a_1a_2 + 2$ eine Quadratzahl. Wegen $a_1 \equiv 0 mod 4$ gilt aber $a_1a_2 + 2 \equiv 0 \cdot a_2 + 2 \equiv 2 \bmod 4$. Bekanntlich ist aber jede Quadratzahl kongruent zu 0 oder 1 modulo 4 (wegen $0^2 \equiv 0 \bmod 4$, $1^2 \equiv 1 \bmod 4$, $2^2 \equiv 0 \bmod 4$ und $3^2 \equiv 1 \bmod 4$). Der Widerspruch zeigt, dass die Annahme im Fall $i = 1$ falsch ist. Setzen wir nun $i > 1$ voraus. In diesem Fall ist $a_1a_i + 2 \equiv a_1 \cdot 0 + 2 \equiv 2 \bmod 4$, andererseits ist auch $a_1a_i + 2$ nach Voraussetzung eine Quadratzahl. Also führt die Annahme auch in diesem Fall zu einem Widerspruch.

zu (c) Angenommen, (a_1, a_2, a_3, a_4) ist ein hübsches Quadrupel. Nach (b) ist keine der vier Zahlen durch 4 teilbar. Da es abgesehen von $\bar{0}$ nur drei Restklassen modulo 4 gibt, müssen zwei der Zahlen a_i, a_j (mit $1 \le i < j \le j$) in derselben Restklasse modulo 4 liegen. Ist diese Restklasse $\bar{2}$, dann sind a_i, a_j beide gerade, und folglich gilt $a_ia_j + 2 \equiv 0 + 2 \equiv 2 \bmod 4$. Aber wie wir bereits in Teil (b) gesehen haben, ist dies unvereinbar mit der Annahme, dass $a_ia_j + 2$ eine Quadratzahl ist. Also muss entweder $a_i \equiv a_j \equiv 1 \bmod 4$ oder $a_i \equiv a_j \equiv 3 \bmod 4$ gelten. In beiden Fällen ist $a_ia_j + 2 \equiv 1 + 2 \equiv 3 \bmod 4$. Aber auch dies ist unmöglich, wenn $a_ia_j + 2$ ein Quadrat ist. Auch hier hat unsere Annahme also zu einem Widerspruch geführt.