Aufgabe F20T1A4

Sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive elfte Einheitswurzel und $K = \mathbb{Q}(\zeta)$.

(a) Zeigen Sie: K ist der Zerfällungskörper von $x^{11} - 1$ über $\mathbb{Q}$. Geben Sie den Isomorphietyp der Galois-Gruppe von $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$ an.

(b) Zeigen Sie: Es gibt eine galoissche Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq L$ mit $[L : \mathbb{Q}] = 5$.

Lösung:

zu (a) Die Nullstellenmenge des Polynoms $f = x^{11} - 1$ ist gegeben durch $N = \{\zeta^k \mid 0 \leq k < 11\}$. Denn wegen $f(\zeta) = (\zeta^k)^{11} - 1 = (\zeta^{11})^k - 1 = 1 - 1 = 0$ ist jedes Element dieser Menge tatsächlich eine Nullstelle von f, und weil ζ eine primitive elfte Einheitswurzel ist, in der multiplikativen Gruppe $\mathbb{C}^\times$ also die Ordnung 11 besitzt, enthält N elf verschiedene Elemente. Weil ein Polynom vom Grad 11 über einem Körper nicht mehr als elf Nullstellen haben kann, muss N die genaue Nullstellenmenge von f sein.

Um nun zu zeigen, dass $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ ist, müssen wir die Gleichung $\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}(N)$ beweisen. Wegen $\zeta \in N$ gilt einerseits $\zeta \in \mathbb{Q}(N)$. Aus $\zeta \in \mathbb{Q}(\zeta)$ folgt auf Grund der Teilkörper-Eigenschaft von $\mathbb{Q}(\zeta)$ andererseits $\zeta^k \in \mathbb{Q}(\zeta)$ für $0 \leq k < 11$, also $N \subseteq \mathbb{Q}(\zeta)$. Aus $N \subseteq \mathbb{Q}(\zeta)$ und $\zeta \in \mathbb{Q}(N)$ folgt laut Vorlesung die behauptete Gleichheit.

Bezeichnet K_n den n-ten Kreisteilungskörper (mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$), so ist die Erweiterung $K_n|\mathbb{Q}$ laut Vorlesung galoissch, und es gilt $\mathrm{Gal}(K_n|\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. Somit gilt $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times$, und weil 11 eine Primzahl ist, gilt außerdem $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. Die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$ ist also zyklisch von Ordnung 10.

zu (b) Weil die Gruppe $G = \mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$ zyklisch von Ordnung 10 ist, gibt es für jeden Teiler $d \in \mathbb{N}$ von 10 eine eindeutig bestimmte Untergruppe U_d von G von Ordnung d. Sei $L = K^{U_2}$ der Fixkörper der Untergruppe U_2. Nach den Ergänzungen zum Hauptsatz der Galoistheorie gilt dann $[L : \mathbb{Q}] = (G : U_2) = \frac{|G|}{|U_2|} = \frac{10}{2} = 5$. Weil G als zyklische Gruppe abelsch ist, sind sämliche Untergruppen von G Normalteiler, insbesondere die Untergruppe U_2. Daraus wiederum folgt laut Vorlesung, dass die Erweiterung $L|\mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung ist.