Aufgabe F20T1A3

(a) Geben Sie die Definition einer *auflösbaren Gruppe* an.

(b) Zeigen Sie: Jede Gruppe der Ordnung 2020 ist auflösbar.

(c) Geben Sie zwei nicht-isomorphe abelsche und zwei nicht-isomorphe nicht-abelsche Gruppen der Ordnung 2020 an (mit Begründung).

Lösung:

zu (a) Eine Gruppe G wird *auflösbar* genannt, wenn G eine abelsche Normalreihe besitzt. Darunter versteht man eine Kette $G = N_0 \supsetneq N_1 \supsetneq N_2 \supseteq ... \supsetneq N_r = \{e_G\}$ mit der Eigenschaft, dass die Untergruppe N_{i+1} jeweils ein Normalteiler von N_i und die FaktorN_i/N_{i+1} abelsch ist, für $0 \le i < r$.

zu (b) Sei G eine Gruppe der Ordnung 2020. Für die Anzahl ν_{101} der 101-Sylowgruppen gilt auf Grund der Sylowsätze $\nu_{101} \mid 20$, also $\nu_{101} \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$, und außerdem $\nu_{101} \equiv 1 \bmod 101$. Wegen $a \not\equiv 1 \bmod 101$ für $a \in \{2, 4, 5, 10, 20\}$ folgt ν_{101}. Sei N die einzige 101-Sylowgruppe von G. Ebenfalls auf Grund der Sylowsätze handelt es sich um einen Normalteiler von G.

Laut Vorlesung ist G genau dann auflösbar, wenn N und G/N auflösbar sind. Wegen $2020 = 2^2 \cdot 5^1 \cdot 101^1$ gilt $|N| = 101^1 = 101$, und als Gruppe von Primzahlordnung ist N zyklisch, damit auch abelsch und auflösbar. Wegen $|G/N| = \frac{2020}{101} = 20$ genügt es zu zeigen, dass jede Gruppe der Ordnung 20 auflösbar ist; daraus ergibt sich auf Grund des soeben genannten Satzes dann die Auflösbarkeit von G.

Sei also H eine Gruppe der Ordnung 20 und μ_p für jede Primzahl p die Anzahl der p-Sylowgruppen von H. Es gilt $\mu_5 \mid 4$, also $\mu_5 \in \{1, 2, 4\}$, und außerdem $\mu_5 \equiv 1 \bmod 5$. Wegen $2 \not\equiv 1 \bmod 5$ und $4 \not\equiv 1 \bmod 5$ folgt $\mu_5 = 1$. Sei M die einzige 5-Sylowgruppe von H; dann gilt $M \trianglelefteq H$. Es gilt $|H| = 5$ und $|H/M| = \frac{|H|}{|M|} = \frac{20}{5} = 4$. Die Zahl 4 ist ein Primzahlquadrat, somit ist H/M eine abelsche und insbesondere auflösbare Gruppe. Auf Grund der Primzahlordnung ist H zyklisch, damit ebenfalls abelsch und auflösbar. Aus der Auflösbarkeit von M und H/M folgt die Auflösbarkeit von H.

zu (c) Sei $A = \mathbb{Z}/2020\mathbb{Z}$ und $B = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/1010\mathbb{Z}$. Die Gruppe A besitzt mit $\bar{1}$ ein Element der Ordnung 2020. Für alle $(\bar{b}, \bar{c}) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/1010\mathbb{Z}$ gilt dagegen $1010(\bar{b}, \bar{c}) = (\overline{1010b}, \overline{1010c}) = (\bar{0}, \bar{0})$; dies zeigt, dass die Ordnung jedes Elements in B ein Teiler von 1010 ist und somit kein Element der Ordnung 2020 in B existiert. Folglich sind A und B zwei nicht zueinander isomorphe abelsche Gruppen.

Eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 2020 konstruieren wir als äußeres semidirektes Produkt. In der Gruppe $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$ ist $\overline{20}$ ein Element der Ordnung 5, folglich existiert laut Vorlesung ein nichttrivialer Homomorphismus $\phi : \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$ gegeben durch $\phi(\bar{1}) = \overline{20}$. Außerdem gilt $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}/101\mathbb{Z})^\times \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/101\mathbb{Z})$; sei $\iota : \mathbb{Z}/100\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/101\mathbb{Z})$ ein beliebig gewählter Isomorphismus und $\psi = \iota \circ \phi$. Das äußere semidirekte Produkt $C_1 = \mathbb{Z}/101\mathbb{Z} \rtimes_\psi \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ist dann eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung $101 \cdot 5 = 505$, und $C = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times C_1$ ist eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung $4 \cdot 505 = 2020$.

Eine weitere nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 2020 ist Diedergruppe D_{1010}, die Symmetriegruppe des regelmäßigen 1010-Ecks. Diese ist laut Vorlesung ebenfalls nicht abelsch. Desweiteren sind C und D_{1010} nicht zueinander isomorph. Denn bekanntlich enthält die Diedergruppe D_n für alle $n \in \mathbb{N}$ nur Elemente der Ordnung 2 und solche, deren Ordnung ein Teiler von n ist. Anhand der Primfaktorzerlegung $1010 = 2 \cdot 5 \cdot 101$ können wir die Teiler von 1010 aufzählen. Die Gruppe D_{1010} enthält demnach nur Elemente der Ordnungen 1, 2, 5, 10, 101, 202, 505 und 1010, aber kein Element der Ordnung 4. Dagegen ist $(\bar{1}, e_{C_1})$ offenbar ein Element der Ordnung 4 in C. Dies zeigt, dass C und D_{1010} nicht zueinander isomorph sind.