Aufgabe F20T1A2

Seien $R = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ und $f : R \to R$, $x \mapsto 7x$.

(a) Zeigen Sie, dass f bijektiv und damit eine Permutation von R ist.

(b) Bestimmen Sie die Fixpunkte von f.

(c) Bestimmen Sie die Anzahl der Bahnen der Operation von $\langle f \rangle$ auf R. Hier steht $\langle f \rangle$ für die von f erzeugte Untergruppe der Permutationen von R.

Hinweis/Kommentar:

Teil (a) kann gelöst werden, indem man die Umkehrabbildung von f bestimmt. Auch diese Abbildung ist durch Multiplikation mit einem Element aus R gegeben. Welches Element könnte das sein? Bei Teil (b) könnte man einfach sämtliche Elemente von R durchgehen und durch Nachrechnen bestimmen, welche davon Fixpunkte sind. Mit Kongruenzrechnung kommt man etwas schneller ans Ziel. In Teil (c) scheint die einfachste Methode zu sein, alle Bahnen explizit auszurechnen. Bestimmen Sie dafür zunächst die Ordnung von $\langle f \rangle$ (bzw. die Ordnung von $\overline{7}$ in $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times$), um die Bahnen problemlos hinschreiben zu können.