Aufgabe F20T1A2

Seien $R = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ und $f : R \to R$, $x \mapsto 7x$.

(a) Zeigen Sie, dass f bijektiv und damit eine Permutation von R ist.

(b) Bestimmen Sie die Fixpunkte von f.

(c) Bestimmen Sie die Anzahl der Bahnen der Operation von $\langle f \rangle$ auf R. Hier steht $\langle f \rangle$ für die von f erzeugte Untergruppe der Permutationen von R.

Lösung:

zu (a) Ist ist $\bar{7} \in R^\times$, und $\overline{13}$ ist das multiplikative Inverse von $\bar{7}$. Daraus folgt, dass $g : R \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \overline{13}x$ die Umkehrabbildung von f ist, denn für alle $x \in R$ gilt $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\bar{7}x) = \overline{13}(\bar{7}x) = \overline{91}x = \bar{1}x = x$ und ebenso $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\overline{13}x) = \bar{7}(\overline{13}x) = \overline{91}x = \bar{1}x = x$. Die Existenz einer Umkehrabbildung zeigt, dass f bijektiv ist.

zu (b) Für $c \in \mathbb{R}$ ist $c + 15\mathbb{Z}$ genau dann ein Fixpunkt, wenn $7c \equiv c \bmod 15$ gilt, also genau dann, wenn 15 ein Teiler von $7c - c = 6c$ ist. Dies wiederum ist wegen $\mathrm{ggT}(3,5) = 1$ genau dann der Fall, wenn 3 und 5 Teiler von $6c$ sind. Da 3 immer ein Teiler von $6c$ ist, dies dies wiederum äquivalent zur Teilbarkeit von $6c$ durch 5, wegen $\mathrm{ggT}(6,5) = 1$ also zur Teilbarkeit von c durch 5. Es gilt $5 \mid c$ genau dann, wenn $c + 15\mathbb{Z} \in \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}\}$ gilt. Also ist $\{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}\}$ die Fixpunktmenge von f.

zu (c) Jeder Fixpunkt bildet eine einelementige Bahn. Wegen $\bar{7}^2 = \overline{49} = \bar{4} \neq \bar{1}$ und $\bar{7}^4 = (\bar{7}^2)^2 = \bar{4}^2 = \overline{16} = \bar{1}$ ist $\bar{7}$ in der Einheitengruppe $R^\times$ ein Element der Ordnung 4. Zwei Bahnen der Operation sind deshalb gegeben durch

$$\langle f \rangle(\bar{1}) \quad = \quad \{f^n(\bar{1}) \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad = \quad \{\bar{7}^n \cdot \bar{1} \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad = \quad \{\bar{7}^n \mid 0 \le n < 4\} \quad = \quad \{\bar{7}, \bar{4}, \overline{13}, \bar{1}\}$$

und

$$\langle f \rangle(\bar{2}) \quad = \quad \{f^n(\bar{2}) \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad = \quad \{\bar{7}^n \cdot \bar{2} \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad = \quad \{\bar{7}^n \cdot \bar{2} \mid 0 \le n < 4\} \quad = \quad \{\overline{14}, \bar{8}, \overline{11}, \bar{2}\} \quad ,$$

eine weitere durch

$$\langle f \rangle(\bar{3}) \quad = \quad \{f^n(\bar{3}) \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad = \quad \{\bar{7}^n \cdot \bar{3} \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad = \quad \{\bar{7}^n \cdot \bar{3} \mid 0 \le n < 4\} \quad = \quad \{\overline{21}, \overline{12}, \bar{9}, \bar{3}\}.$$

Insgesamt existieren also genau sechs Bahnen.