Aufgabe F20T1A1

Sei K ein Körper und $V = K^{2\times 2}$ der K-Vektorraum der 2×2-Matrizen über K. Für $A, B \in K^{2\times 2}$ betrachten wir die Abbildung $\Phi : V \to V,\ X \mapsto AXB$. Zeigen Sie:

(a) Φ ist ein Endomorphismus von V.

(b) $\mathrm{Spur}(\Phi) = \mathrm{Spur}(A)\mathrm{Spur}(B)$

Hinweis/Kommentar:

Teil (a) ist reines Nachrechnen unter Verwendung der bekannten Rechenregeln für Matrizen. In Teil (b) verwenden Sie, dass der K-Vektorraum V von den sog. *Basismatrizen*, bekannt aus der Linearen Algebra, aufgespannt wird. Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von Φ bezüglich einer geordneten Basis bestehend aus Basismatrizen, und betimmen Sie von dieser 4×4-Matrix die Spur.