Aufgabe F19T3A5 (12 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Gruppen S_5 und $A_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nicht isomorph sind.
(Hier bezeichnet S_5 die symmetrische und A_5 die alternierende Gruppe auf 5 Elementen.)

Lösung:

1. Möglichkeit:
Die Gruppe $A_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ besitzt mit $N = \{\mathrm{id}\} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ einen Normalteiler der Ordnung 2, denn für alle Elemente $(\sigma, a) \in A_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und alle $b \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gilt

$$(\sigma, a) \cdot (\mathrm{id}, b) \cdot (\sigma, a)^{-1} \quad = \quad (\sigma, a) \cdot (\mathrm{id}, b) \cdot (\sigma^{-1}, -a) \quad = \quad (\sigma \circ \mathrm{id} \circ \sigma^{-1}, a + b - a) \quad = \quad (\mathrm{id}, b) \in N \quad ,$$

außerdem ist $|N| = |\{\mathrm{id}\}| \cdot |\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}| = 1 \cdot 2 = 2$. Wären nun S_5 und $A_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ isomorph, dann müsste es auch in S_5 einen Normalteiler M mit $|M| = 2$ geben. Da 2 eine Primzahl ist, wäre M zyklisch, also $M = \langle\sigma\rangle = \{\mathrm{id}, \sigma\}$ für ein Element $\sigma \in S_5$ der Ordnung 2. Die einzigen Elemente der Ordnung 2 in S_5 sind die Tranpositionen und die Doppeltranspositionen. Betrachten wir zunächst den Fall, dass σ eine Transposition ist. Weil in S_5 mehr als eine Transposition existiert, gibt es eine Transposition $\tau \in S_5$ mit $\tau \neq \sigma$. Da je zwei Elemente vom selben Zerlegungstyp in S_5 konjugiert sind, existiert ein $\rho \in S_5$ mit $\tau = \rho\sigma\rho^{-1}$. Es gilt also $\sigma \in M$ und $\rho \in S_5$, aber $\rho\sigma\rho^{-1} = \tau \notin M$. Dies zeigt, dass M kein Normalteiler von S_5 ist, im Widerspruch zu unserer Annahme.

Der Fall, dass σ eine Doppeltransposition ist, wird genauso zum Widerspruch geführt. Weil in S_5 auch mehr als eine Doppeltransposition existiert, gibt es eine Doppeltransposition $\tau \in S_5$ mit $\tau \neq \sigma$. Wieder existiert ein $\rho \in S_5$ mit $\tau = \rho\sigma\rho^{-1}$. Wie zuvor erhalten wir $\sigma \in M$ und $\rho \in S_5$, aber $\rho\sigma\rho^{-1} \notin M$. Aus diesmal ist M kein Normalteiler von S_5. Unsere Annahme, dass S_5 und $A_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ isomorph sind, hat also insgesamt zu einem Widerspruch geführt.

2. Möglichkeit:
Bekanntlich ist jeder k-Zykel in S_5 für $2 \leq k \leq 5$ jeweils ein Element der Ordnung k. Insbesondere ist $(1\ 2\ 3\ 4)$ ein Element der Ordnung 4 in S_5. Wären nun S_5 und $A_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ isomorph, dann müsste auch in $A_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ein Element (σ, a) der Ordnung 4 existieren, mit $\sigma \in A_5$ und $a \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Aus

$$(\sigma^4, \bar{4}a) \quad = \quad (\sigma, a)^4 \quad = \quad e_{A_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \quad = \quad (\mathrm{id}, \bar{0})$$

folgt insbesondere $\sigma^4 = \mathrm{id}$, also ist σ ein Element der Ordnung 1, 2 oder 4 in A_5. Im Fall $\mathrm{ord}(\sigma) \in \{1, 2\}$ wäre aber $(\sigma, a)^2 = (\sigma^2, \bar{2}a) = (\mathrm{id}, \bar{0}) = e_{A_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ und (σ, a) somit ein Element der Ordnung ≤ 2, im Widerspruch zur Annahme, dass die Ordnung gleich 4 ist. Also muss $\mathrm{ord}(\sigma) = 4$ gelten.

Aber in A_5 gibt es kein Element der Ordnung 4. Denn ein solches Element σ müsste in seiner disjunkten Zykelzerlegung einen Zykel enthalten, deren Länge ein Vielfaches von 4 ist (weil die Ordnung von σ das kgV der Zykellängen in der Zerlegung ist). Weil sich die Zykellängen insgesamt zu einem Wert ≤ 5 addieren müssen, wäre dies ist nur möglich, wenn σ selbst ein 4-Zykel ist. Aber allgemein hat ein k-Zykel das Signum $(-1)^{k-1}$, es wäre also $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{4-1} = -1$, im Widerspruch zu $\sigma \in A_5$. Unsere Annahme, dass S_5 und $A_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ isomorph sind, hat insgesamt zu einem Widerspruch geführt.