Aufgabe F19T3A4 (12 Punkte)

Sei $\mathbb{F}_{11} = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ der Körper mit elf Elementen.

(a) Zeigen Sie, dass die Restklassenringe $\mathbb{F}_{11}[x]/(x^2+\bar{1})$ und $\mathbb{F}_{11}[x]/(x^2+x+\bar{4})$ jeweils einen Körper (mit 121 Elementen) definieren.

(b) Bestimmen Sie konkret einen Isomorphismus

$$\mathbb{F}_{11}[x]/(x^2+\bar{1}) \to \mathbb{F}_{11}[x]/(x^2+x+\bar{4})$$

durch Angabe des Bildes von $x + (x^2+\bar{1})$.

Hinweis / Kommentar:

zu (a) Die Körpereigenschaft folgt aus der Irreduzibilität von $x^2+\bar{1}$ bzw. $x^2+x+\bar{4}$. Hier müssen lediglich die richtigen Sätze zitiert werden. Die Elementezahl erhält man durch Angabe geeigneter Repräsentantenssyteme von $\mathbb{F}_{11}[x]/(x^2+\bar{1})$ und $\mathbb{F}_{11}[x]/(x^2+x+\bar{4})$. In der Vorlesung wurde mittels Division durch Rest gezeigt, wie ein solches Repräsentantenssytem zu Stande kommt.

zu (b) Sei $\bar{\phi}$ ein Isomorphismus der gesuchten Form. Machen Sie sich zunächst klar, dass das Bild $\bar{\phi}(x)$ die Form $ax+b+(x^2+x+\bar{4})$ mit $a, b \in \mathbb{F}_{11}$ haben muss, und dass auf Grund der Homomorphismus-Eigenschaft das Element $x^2+\bar{1}+(x^2+\bar{1})$ außerdem auf $0_{\mathbb{F}_{11}[x]/(x^2+x+\bar{4})}$ abgebildet werden muss. Mit diesen Informationen erhält man eine Gleichung, mit der sich passende $a, b \in \mathbb{F}_{11}$ berechnen lassen. Beweisen Sie anschließend die Existenz von $\bar{\phi}$ mit dem Homomorphiesatz.