Aufgabe F19T3A3 (12 Punkte)

Sei $\zeta = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \in \mathbb{C}$ (mit $i^2 = -1$) und seien $K = \mathbb{Q}(\zeta)$, $L = \mathbb{Q}(\zeta, \sqrt[4]{2})$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\zeta^4 = -1$, und K ist der Zerfällungskörper von $x^4 + 1$ über $\mathbb{Q}$.

(b) Das Polynom $f = x^4 + 2$ ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$.

(c) Der Körper L ist Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$.

Hinweis/Kommentar:

Die Gleichung $\zeta^4 = -1$ ist leicht nachzurechnen. Beachten Sie für Teil (a) außerdem, dass die Nullstellen von x^4+1 genau die primitiven achten Einheitswurzeln, das Polynom selbst also das Kreisteilungspolynom Φ_8 ist. Aus der Zahlentheorie-Vorlesung ist bekannt, wie die Nullstellenmenge dieses Polynoms aussieht. Teil (b) ist reine Routine, sobald man mit Hilfe der primitiven achten Einheitswurzeln die komplexen Nullstellen von f angegeben hat. Auch die Bestimmung des Zerfällungskörpers in Teil (c) bereitet dann keine Schwierigkeiten mehr.