Aufgabe F19T3A2 (12 Punkte)

Es sei G eine Gruppe. Für $g, x, y \in G$ sei ${}^{(x,y)}g = xgy^{-1}$. (*)

(a) Zeigen Sie, dass (*) eine transitive Operation von $G \times G$ auf G definiert. Bestimmen Sie die Elemente des Stabilisators von 1_G in $G \times G$.

(b) Bestimmen Sie den Kern der obigen Operation von $G \times G$ auf G. Wann ist die Operation treu? (Der Kern der Operation einer Gruppe H auf einer Menge X ist die Menge aller $h \in H$ mit ${}^h x = x$ für alle $x \in X$. Die Operation heißt treu, falls der Kern nur aus dem neutralen Element besteht.)

Hinweis/Kommentar:

Das Überprüfen der definierenden Eigenschaften einer Gruppenoperation ist reine Routine, und für den Nachweis der Transitivität genügt es, die Bahn von 1_G zu betrachten. Auch der Stabilisator dieses Elements ist durch eine einfache Äquivalenzumformung leicht zu bestimmen. Für Teil (b) beachten Sie, dass jedes Element des Kerns der Gruppenoperation auch im Stabilisator von 1_G enthalten ist. Herauskommen sollte, dass die Operation genau dann treu ist, wenn das Zentrum $Z(G)$ von G trivial ist.