Aufgabe F19T3A2 (12 Punkte)

Es sei G eine Gruppe. Für $g, x, y \in G$ sei ${}^{(x,y)}g = xgy^{-1}$. (*)

(a) Zeigen Sie, dass (*) eine transitive Operation von $G \times G$ auf G definiert. Bestimmen Sie die Elemente des Stabilisators von 1_G in $G \times G$.

(b) Bestimmen Sie den Kern der obigen Operation von $G \times G$ auf G. Wann ist die Operation treu? (Der Kern der Operation einer Gruppe H auf einer Menge X ist die Menge aller $h \in H$ mit ${}^h x = x$ für alle $x \in X$. Die Operation heißt treu, falls der Kern nur aus dem neutralen Element besteht.)

Lösung:

zu (a) Zunächst zeigen wir, dass durch (*) eine Gruppenoperation gegeben ist. Seien $(x, y), (u, v) \in G \times G$ und $g \in G$ vorgegeben. Zu überprüfen ist ${}^{e_{G\times G}}g = g$ und ${}^{(x,y)}({}^{(u,v)}g) = {}^{(x,y)\cdot(u,v)}g$. Tatsächlich gilt

$$ {}^{e_{G\times G}}g \quad = \quad {}^{(e_G,e_G)}g \quad = \quad e_G \cdot g \cdot e_G^{-1} \quad = \quad g $$

und

$$ {}^{(x,y)}({}^{(u,v)}g) \quad = \quad {}^{(x,y)}(ugv^{-1}) \quad = \quad x(ugv^{-1})y^{-1} \quad = \quad (xu)g(yv)^{-1} \quad = \quad {}^{(xu,yv)}g \quad = \quad {}^{(x,y)\cdot(u,v)}g. $$

Nun beweisen wir die Transitivität. Seien $g, h \in G$ vorgegeben. Zu zeigen ist, dass ein Element $(x, y) \in G \times G$ mit ${}^{(x,y)}g = h$ existiert. Setzen wir $(x, y) = (h, g)$, dann gilt tatsächlich ${}^{(x,y)}g = {}^{(h,g)}g = h \cdot g \cdot g^{-1} = h \cdot e_G = h$.

Sei $(G \times G)_{1_G}$ der Stabilisator von 1_G. Dann gilt für jedes $(x, y) \in G \times G$ die Äquivalenz

$$ (x, y) \in (G \times G)_{1_G} \quad \Leftrightarrow \quad {}^{(x,y)}1_G = 1_G \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot 1_G \cdot y^{-1} = 1_G \quad \Leftrightarrow \quad xy^{-1} = 1_G \quad \Leftrightarrow \quad x = y. $$

Der Stabilisator ist also gegeben durch $(G \times G)_{1_G} = \{(x, x) \mid x \in G\}$.

zu (b) Ist $(x, y) \in G \times G$ ein Element des Kerns der Gruppenoperation, dann gilt insbesondere ${}^{(x,y)}1_G = 1_G$ und somit $(x, y) \in (G \times G)_{1_G}$. Mit unserer Gleichung für $(G \times G)_{1_G}$ aus Teil (a) folgt daraus $x = y$. Das Element (x, x) liegt nun genau dann im Kern der Operation, wenn x im Zentrum $Z(G)$ der Gruppe liegt, denn es gilt die Äquivalenz

$$ {}^{(x,x)}g = g \;\forall\, g \in G \quad \Leftrightarrow \quad xgx^{-1} = g \;\forall\, g \in G \quad \Leftrightarrow \quad xg = gx \;\forall\, g \in G \quad \Leftrightarrow \quad x \in Z(G). $$

Der Kern der Operation ist also gegeben durch $\{(x, x) \mid x \in Z(G)\}$. Nach Definition ist die Operation treu genau dann, wenn der Kern mit $\{(e_G, e_G)\}$ übereinstimmt, und dies ist auf Grund unseres Ergebnisses genau dann der Fall, wenn $Z(G) = \{e_G\}$ gilt.