Aufgabe F19T3A1 (12 Punkte)

Im Folgenden sei p eine Primzahl. Betrachten Sie den folgenden Teilring von $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Z}_{(p)} \quad = \quad \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \ , \ p \nmid b \right\}$$

(Sie müssen nicht nachprüfen, dass dies ein Teilring von $\mathbb{Q}$ ist.)

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung ein Ringisomorphismus ist:

$$\varphi : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)} \quad , \quad a + p\mathbb{Z} \mapsto a + p\mathbb{Z}_{(p)}$$

(b) Betrachten Sie den Fall $p = 5$. Für $x \in \mathbb{Z}_{(5)}$ schreiben wir zur Abkürzung $\bar{x} = x + 5\mathbb{Z}_{(5)}$. Bestimmen Sie die (eindeutig bestimmte) ganze Zahl $y \in \{0, ..., 4\}$ mit $\bar{y} = \overline{\tfrac{2}{3}} + \overline{\tfrac{1}{7}}$.

Hinweis/Kommentar:

Das Hauptproblem in Teil (a) ist der Nachweis der Surjektivität von φ. Zeigen Sie, dass $a + p\mathbb{Z}$ auf das Element $\frac{b}{c} + p\mathbb{Z}_{(p)}$ abgebildet wird, wenn $ac \equiv b \mod p$ erfüllt ist. Mit diesem Ansatz, angewendet auf $\frac{b}{c} = \frac{2}{3} + \frac{1}{7} = \frac{17}{21}$, findet man in Teil (b) auch die Zahl y.