Aufgabe F19T3A1 (12 Punkte)

Im Folgenden sei p eine Primzahl. Betrachten Sie den folgenden Teilring von $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Z}_{(p)} \quad = \quad \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \,\middle|\, a,b \in \mathbb{Z}\ ,\ p \nmid b \right\}$$

(Sie müssen nicht nachprüfen, dass dies ein Teilring von $\mathbb{Q}$ ist.)

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung ein Ringisomorphismus ist:

$$\varphi : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)} \quad , \quad a + p\mathbb{Z} \mapsto a + p\mathbb{Z}_{(p)}$$

(b) Betrachten Sie den Fall $p = 5$. Für $x \in \mathbb{Z}_{(5)}$ schreiben wir zur Abkürzung $\bar{x} = x + 5\mathbb{Z}_{(5)}$. Bestimmen Sie die (eindeutig bestimmte) ganze Zahl $y \in \{0, ..., 4\}$ mit $\bar{y} = \overline{\frac{2}{3}} + \overline{\frac{1}{7}}$.

Lösung:

zu (a) Zunächst zeigen wir, dass φ ein Ringhomomorphismus ist. Seien $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ vorgegeben. Zu zeigen ist $\varphi(\bar{1}) = 1_{\mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)}}$, $\varphi(\bar{a} + \bar{b}) = \varphi(\bar{a}) + \varphi(\bar{b})$ und $\varphi(\bar{a}\bar{b}) = \varphi(\bar{a})\varphi(\bar{b})$. Zunächst gilt tatsächlich

$$\varphi(\bar{1}) \quad = \quad \varphi(1 + p\mathbb{Z}) \quad = \quad 1 + p\mathbb{Z}_{(p)} \quad = \quad 1_{\mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)}}.$$

Bezeichnen $a, b \in \mathbb{Z}$ Urbilder von $\bar{a}, \bar{b}$, so gilt weiter

$$\varphi(\bar{a} + \bar{b}) \quad = \quad \varphi(a + b + p\mathbb{Z}) \quad = \quad (a + b) + p\mathbb{Z}_{(p)} \quad = \quad (a + p\mathbb{Z}_{(p)}) + (b + p\mathbb{Z}_{(p)}) \quad = \quad \varphi(\bar{a}) + \varphi(\bar{b})$$

und

$$\varphi(\bar{a}\bar{b}) \quad = \quad \varphi(ab + p\mathbb{Z}) \quad = \quad ab + p\mathbb{Z}_{(p)} \quad = \quad (a + p\mathbb{Z}_{(p)})(b + p\mathbb{Z}_{(p)}) \quad = \quad \varphi(\bar{a})\varphi(\bar{b}).$$

Zum Nachweis der Injektivität sei $a + p\mathbb{Z} \in \ker(\varphi)$ vorgegeben, mit $a \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $\varphi(a + p\mathbb{Z}) = 0_{\mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)}}$, also $a + p\mathbb{Z}_{(p)} = 0 + p\mathbb{Z}_{(p)}$ und somit $a \in p\mathbb{Z}_{(p)}$. Es gibt also Elemente $b, c \in \mathbb{Z}$ mit $p \nmid b$ und $a = p\frac{b}{c}$. Es folgt $ac = pb$. Aus $p \mid ac$ und $p \nmid c$ wiederum folgt $p \mid a$, da p eine Primzahl ist. Dies wiederum bedeutet $a + p\mathbb{Z} = 0 + p\mathbb{Z} = 0_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$. Es gilt also $\ker(\varphi) = \{0_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}\}$, also ist φ tatsächlich injektiv.

Zum Nachweis der Surjektivität sei $\frac{b}{c} + p\mathbb{Z}_{(p)}$ vorgegeben, mit $b, c \in \mathbb{Z}$ und $p \nmid c$. Wegen $p \nmid c$ ist das Bild $\bar{c}$ in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ invertierbar. Sei nun $a \in \mathbb{Z}$ ein Urbild der Restklasse $\bar{b}\bar{c}^{-1}$. Wir zeigen nun, dass $\varphi(a) = \frac{b}{c} + p\mathbb{Z}_{(p)}$ gilt, was zu $a + p\mathbb{Z}_{(p)} = \frac{b}{c}p\mathbb{Z}_{(p)}$ äquivalent ist. In $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ gilt die Gleichung $\bar{c}\bar{a} = \bar{b}$. Es existiert also ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $ca = b + mp$. Daraus folgt $a = \frac{b}{c} + p\frac{m}{c} \in \frac{b}{c} + p\mathbb{Z}_{(p)}$, was zeigt, dass die Gleichung $a + p\mathbb{Z}_{(p)} = \frac{b}{c}p\mathbb{Z}_{(p)}$ tatsächlich erfüllt ist.

Anmerkung:
In dieser Lösung wurde davon ausgegangen, dass die Abbildung φ tatsächlich existiert (also insbesondere wohldefiniert ist). Das scheint auf Grund der Formulierung der Aufgabenstellung („Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung...“) gerechtfertigt zu sein. Hätte die Formulierung statt dessen gelautet „Zeigen Sie, dass ein Ringisomorphismus $\varphi : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)}$ mit $\varphi(a + p\mathbb{Z}) = a + p\mathbb{Z}_{(p)}$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ existiert.“, hätte man statt dessen mit dem Homomorphiesatz arbeiten müssen. Dazu hätte man nachweisen müssen, dass die Abbildung $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)}$, $a \mapsto a + p\mathbb{Z}_{(p)}$ ein surjektiver Ringhomomorphismus mit $\ker(\phi) = p\mathbb{Z}$ ist. Der gesuchte Isomorphismus φ ist dann der von ϕ induzierte Isomorphismus $\bar{\phi}$.

zu (b) Die Idee zur Gewinnung der Zahl y ist in Teil (a) im Nachweis der Surjektivität bereits enthalten. Zunächst einmal ist $\frac{2}{3} + \frac{1}{7} = \frac{14}{21} + \frac{3}{21} = \frac{17}{21}$. Sei $b = 17$, $c = 21$, und seien $\bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ die Bilder von b, c in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Dann gilt $\bar{b} \cdot \bar{c}^{-1} = \overline{17} \cdot \overline{21}^{-1} = \bar{2} \cdot \bar{1}^{-1} = \bar{2}$ in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Die Zahl $y = 2$ hat nun die gewünschte Eigenschaft, denn es gilt

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{2}{3} + 5\mathbb{Z}_{(5)}\right) + \left(\tfrac{1}{7} + 5\mathbb{Z}_{(5)}\right) \quad &= \quad \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{7} + 5\mathbb{Z}_{(5)} \quad = \quad \tfrac{17}{21} + 5\mathbb{Z}_{(5)} \\
= \quad 2 - \tfrac{25}{21} + 5\mathbb{Z}_{(5)} \quad &= \quad 2 + 5 \cdot \left(-\tfrac{5}{21}\right) + 5\mathbb{Z}_{(5)} \quad = \quad 2 + 5\mathbb{Z}_{(5)}.
\end{aligned}$$