Aufgabe F19T2A5 (12 Punkte)

Sei $L|\mathbb{Q}$ eine endliche Galoiserweiterung mit $L \subseteq \mathbb{C}$ und $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}) \cong S_3 \times H$ mit $|H| = 88$, wobei S_3 die symmetrische Gruppe auf 3 Punkten bezeichnet.

(a) Zeigen Sie: Es gilt $L \cap \mathbb{Q}(\sqrt[5]{5}) = \mathbb{Q}$.

(b) Zeigen Sie: Es gibt einen Zwischenkörper K von $L|\mathbb{Q}$ mit $[K : \mathbb{Q}] = 8$, der ein Zerfällungskörper eines Polynoms in $\mathbb{Q}[x]$ vom Grad 8 ist.

Hinweis/Kommentar:

Teil (a) ist eine einfache Anwendung der Gradformel. Für Teil (b) machen Sie sich zunächst klar, dass es ausreicht zu zeigen, dass in $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ ein Normalteiler von Ordnung 66 existiert. Was lässt sich unter Verwendung der Galoistheorie über den Fixkörper L^N eines solchen Normalteilers N aussagen?