Aufgabe F19T2A5 (12 Punkte)

Sei $L|\mathbb{Q}$ eine endliche Galoiserweiterung mit $L \subseteq \mathbb{C}$ und $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}) \cong S_3 \times H$ mit $|H| = 88$, wobei S_3 die symmetrische Gruppe auf 3 Punkten bezeichnet.

(a) Zeigen Sie: Es gilt $L \cap \mathbb{Q}(\sqrt[5]{5}) = \mathbb{Q}$.

(b) Zeigen Sie: Es gibt einen Zwischenkörper K von $L|\mathbb{Q}$ mit $[K : \mathbb{Q}] = 8$, der ein Zerfällungskörper eines Polynoms in $\mathbb{Q}[x]$ vom Grad 8 ist.

Lösung:

zu (a) Die Inklusion „$\supseteq$" ist offenbar erfüllt, denn $\mathbb{Q}$ ist in L und in $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{5})$ enthalten; nach Definition sind beides Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$. Für den Nachweis der Gleichheit setzen wir $M = L \cap \mathbb{Q}(\sqrt[5]{5})$ und bestimmen den Erweiterungsgrad $[M : \mathbb{Q}]$. Zunächst zeigen wir, dass $[\mathbb{Q}(\sqrt[5]{5}) : \mathbb{Q}] = 5$ gilt. Das Polynom $f = x^5 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$ ist normiert, erfüllt $f(\sqrt[5]{5}) = 0$ und ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$ auf Grund des Eisensteinkriteriums (angewendet auf die Primzahl $p = 5$). Somit ist f das Minimalpolynom von $\sqrt[5]{5}$ über $\mathbb{Q}$, und daraus folgt

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[5]{5}) : \mathbb{Q}] \quad = \quad \mathrm{grad}(f) \quad = \quad 5.$$

Weil $L|\mathbb{Q}$ eine endliche Galois-Erweiterung ist, gilt $[L : \mathbb{Q}] = |\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})| = |S_3 \times H| = |S_3| \cdot |H| = 6 \cdot 88$. Die Gradformel liefert nun sowohl

$$5 \quad = \quad [\mathbb{Q}(\sqrt[5]{5}) : \mathbb{Q}] \quad = \quad [\mathbb{Q}(\sqrt[5]{5}) : M] \cdot [M : \mathbb{Q}]$$

als auch

$$6 \cdot 88 \quad = \quad [L : \mathbb{Q}] \quad = \quad [L : M] \cdot [M : \mathbb{Q}].$$

Dies zeigt, dass $[M : \mathbb{Q}]$ sowohl Teiler von 5 als auch von $6 \cdot 88$ ist. Damit ist $[M : \mathbb{Q}]$ auch ein Teiler von $\mathrm{ggT}(5, 6 \cdot 88) = 1$. Es gilt also $[M : \mathbb{Q}] = 1$, und daraus wiederum folgt $M = \mathbb{Q}$.

zu (b) Die Existenz eines Zwischenkörper K mit $[K : \mathbb{Q}] = 8$ folgt aus dem Hauptsatz der Galoistheorie (bzw. einer seiner Ergänzungen), wenn wir zeigen können, dass in $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ eine Untergruppe vom Index 8 existiert. Nach dem Satz von Lagrange sind in $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ die Untergruppen vom Index 8 genau die Untergruppen der Ordnung $\frac{6 \cdot 88}{8} = 6 \cdot 11 = 66$. Offenbar genügt es zu zeigen, dass H eine Untergruppe P der Ordnung 11 besitzt, denn dann ist $S_3 \times P$ eine Untergruppe der Ordnung $|S_3 \times P| = |S_3| \cdot |P| = 6 \cdot 11 = 66$ in $S_3 \times H$, und auf Grund der Isomorphie existiert auch eine Untergruppe derselben Ordnung in $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$.

Wir zeigen mit Hilfe der Sylowsätze, dass in H sogar ein Normalteiler der Ordnung 11 existiert. Sei ν_{11} die Anzahl der 11-Sylowgruppen von H; wegen $|H| = 2^3 \cdot 11^1$ sind dies genau die Untergruppen der Ordnung 11. Auf Grund des 3. Sylowsatzes gilt $\nu_{11} \mid 8$, also $\nu_{11} \in \{1, 2, 4, 8\}$, und außerdem $\nu_{11} \equiv 1 \mod 11$. Wegen $2, 4, 8 \not\equiv 1 \mod 11$ folgt $\nu_{11} = 1$. Auf Grund des 2. Sylowsatzes ist die einzige 11-Sylowgruppe in H, die wir mit P bezeichnen, ein Normalteiler von H.

Wir bemerken, dass $S_3 \times P$ nicht nur eine Untergruppe, sondern auch ein Normalteiler von $S_3 \times H$ ist, denn für alle $\sigma, \tau \in S_3$, $h \in H$ und $p \in P$ gilt $hph^{-1} \in P$ wegen $P \trianglelefteq H$ und somit auch

$$(\sigma, h) \cdot (\tau, p) \cdot (\sigma, h)^{-1} \quad = \quad (\sigma, h) \cdot (\tau, p) \cdot (\sigma^{-1}, h^{-1}) \quad = \quad (\sigma\tau\sigma^{-1}, hph^{-1}) \quad \in \quad S_3 \times P.$$

Sei N das Bild von $S_3 \times P$ unter dem Isomorphismus $S_3 \times H \cong \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$. Dann ist N auch ein Normalteiler von $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$, und es gilt $|N| = |S_3 \times P| = |S_3| \cdot |P| = 6 \cdot 11 = 66$, wie gewünscht. Bezeichnen wir den Fixkörper L^N von N mit K, dann ist $K|\mathbb{Q}$ nach den Ergänzungssätzen zum Hauptsatz der Galoistheorie eine normale Teilerweiterung von $L|\mathbb{Q}$, mit $[K : \mathbb{Q}] = (\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}) : N) = \frac{6 \cdot 88}{66} = 8$.

Nun zeigen wir noch, dass ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$ vom Grad 8 existiert mit der Eigenschaft, dass L Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ ist. Weil $L|\mathbb{Q}$ als Galois-Erweiterung separabel ist, ist jedes Element aus L separabel über $\mathbb{Q}$, erst recht jedes $\alpha \in K$. Mit $L|\mathbb{Q}$ ist also auch die Teilerweiterung $K|\mathbb{Q}$ eine endliche separable Erweiterung. Nach dem Satz vom primitiven Element existiert ein $\alpha \in K$ mit $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Bezeichnen wir mit f das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$, dann folgt

$$\mathrm{grad}(f) \quad = \quad [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \quad = \quad [K : \mathbb{Q}] \quad = \quad 8.$$

Weil $K|\mathbb{Q}$ normal ist, und weil das Polynom f als Minimalpolynom irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist und in K die Nullstelle α besitzt, zerfällt f über K in Linearfaktoren. Außerdem wir K über $\mathbb{Q}$ von den Nullstellen des Polynoms f erzeugt, da K bereits von α allein über $\mathbb{Q}$ erzeugt wird. Damit ist gezeigt, dass es sich bei K um einen Zerfällungskörper von f handelt.