

Aufgabe F19T2A4 (12 Punkte)

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) Ist $\mathbb{Q}[x]/(x^5 - 2, x^6 + x^5 - 2x - 2)$ ein Körper?

(b) Ist $\mathbb{Z}[x]/(5, x^3 - 2x^2 + 4)$ ein Körper?

Hinweis/Kommentar:

zu (a) Der Ring $\mathbb{Q}[x]$ ist ein Hauptidealring. Somit wird jedes Ideal bereits durch ein einziges Polynom erzeugt. Ob ein Faktoring $\mathbb{Q}[x]/(g)$ ein Körper ist, lässt sich leicht am Polynom $g \in \mathbb{Q}[x]$ erkennen (wie?).

zu (b) Zeigen Sie $\mathbb{Z}[x]/(5, x^3 - 2x^2 + 4) \cong \mathbb{F}_5[x]/(x^3 - \bar{2}x^2 + \bar{4})$ mit dem Homomorphiesatz für Ringe. Dann ist die Entscheidung (Körper oder nicht) wieder leicht, siehe Teil (a).