Aufgabe F19T2A4 (12 Punkte)

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) Ist $\mathbb{Q}[x]/(x^5-2, x^6+x^5-2x-2)$ ein Körper?

(b) Ist $\mathbb{Z}[x]/(5, x^3-2x^2+4)$ ein Körper?

Lösung:

zu (a) Wir zeigen, dass $\mathbb{Q}[x]/(x^5-2, x^6+x^5-2x-2)$ ein Körper ist. Weil $\mathbb{Q}[x]$ als Polynomring über einem Körper ein Hauptidealring ist, wird das Ideal $I = (x^5-2, x^6+x^5-2x-2)$ bereits durch ein einziges Polynom erzeugt. Offenbar ist $x^6+x^5-2x-2 = (x+1)(x^5-2)$. Daraus folgt

$$I \quad = \quad (x^5-2).$$

Denn x^5-2 und x^6+x^5-2x-2 sind beides Vielfache von x^5-2 und somit im Hauptideal (x^5-2) enthalten; daraus folgt $I = (x^5-2, x^6+x^5-2x-2) \subseteq (x^5-2)$. Aus $x^5-2 \in \{x^5-2, x^6+x^5-2x-2\} \subseteq I$ folgt umgekehrt $(x^5-2) \subseteq I$.

Also gilt $\mathbb{Q}[x]/(x^5-2, x^6+x^5-2x-2) = \mathbb{Q}[x]/(x^5-2)$. Das Polynom x^5-2 ist irreduzibel nach dem Eisenstein-Kriterium, angewendet auf die Primzahl $p=2$. Weil $\mathbb{Q}[x]$ ein Hauptidealring ist, folgt daraus, dass (x^5-2) in $\mathbb{Q}[x]$ ein maximales Ideal ist. Daraus wiederum folgt, dass der Faktorring $\mathbb{Q}(x)/(x_5-2)$ ein Körper ist.

zu (b) Auch der Faktorring $\mathbb{Z}[x]/(5, x^3-2x^2+4)$ ist ein Körper. Zur Begründung beweisen wir zunächst $\mathbb{Z}[x]/(5, x^3-2x^2+4) \cong \mathbb{F}_5[x]/(x^3-\bar{2}x^2+\bar{4})$ mit Hilfe des Homomorphiesatzes für Ringe und betrachten dazu die Abbildung

$$\phi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{F}_5[x]/(f) \quad , \quad g \mapsto \bar{g} + (\bar{f})$$

mit $f = x^3-2x^2+4$, wobei $\bar{g}$ jeweils das Bild von $g \in \mathbb{Z}[x]$ in $\mathbb{F}_5[x]$ bezeichnet. Diese Abbildung ist ein Ringhomomorphismus, denn es gilt $\phi(1) \quad = \quad \bar{1} + (\bar{f}) = 1_{\mathbb{F}[5]/(\bar{f})}$ und für $g, h \in \mathbb{Z}[x]$ außerdem

$$\phi(g+h) \quad = \quad \overline{g+h} + (\bar{f}) \quad = \quad (\bar{g}+\bar{h}) + (\bar{f}) \quad = \quad \bar{g} + (\bar{f}) + \bar{h} + (\bar{f}) + \phi(g) + \phi(h)$$

und

$$\phi(gh) \quad = \quad \overline{gh} + (\bar{f}) \quad = \quad (\bar{g}\bar{h}) + (\bar{f}) \quad = \quad (\bar{g} + (\bar{f}))(\bar{h} + (\bar{f}))) \quad = \quad \phi(g)\phi(h).$$

Außerdem ist ϕ surjektiv. Ist nämlich $\bar{g} + (\bar{f}) \in \mathbb{F}_5[x]/(\bar{f})$ vorgegeben, mit $\bar{g} \in \mathbb{F}_5[x]$, und g ein Urbild von $\bar{g}$ in $\mathbb{Z}[x]$, dann gilt $\phi(g + (f)) = \bar{g} + (\bar{f})$. Schließlich gilt für jedes $g \in \mathbb{Z}[x]$ mit dem Bild $\bar{g} \in \mathbb{F}_5[x]$ noch die Äquivalenz

$$g \in \ker(\phi) \quad \Leftrightarrow \quad \phi(g) = 0_{\mathbb{F}_5[x]/(\bar{f})} \quad \Leftrightarrow \quad g \in (5,f)\bar{g} + (\bar{f}) = \bar{0} + (\bar{f}) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{g} \in (\bar{f}) \quad \Leftrightarrow$$
$$\exists\, \bar{h} \in \mathbb{F}_5[x] : \bar{g} = \bar{f} \cdot \bar{h} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, h \in \mathbb{Z}[x] : g \equiv fh \bmod (5) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, h, u \in \mathbb{Z}[x] : g = fh + 5u \quad \Leftrightarrow \quad g \in (5, f)$$

und somit $\ker(\phi) = (5, f)$. Insgesamt sind damit alle Voraussetzungen des Homomorphiesatzes für Ringe erfüllt, und wir erhalten einen Isomorphismus $\mathbb{Z}[x]/(5,f) \cong \mathbb{F}_5[x]/(\bar{f})$.

Es genügt somit zu begründen, dass $\mathbb{F}_5[x]/(\bar{f})$ ein Körper ist. Das Polynom $\bar{f} = x^3 - \bar{2}x^2 + \bar{4}$ besitzt in $\mathbb{F}_5$ keine Nullstelle, denn es gilt $\bar{f}(\bar{0}) = \bar{4} \neq \bar{0}$, $\bar{f}(\bar{1}) = \bar{1}^3 - \bar{2}\cdot\bar{1}^2 + \bar{4} = \bar{3} \neq \bar{0}$, $\bar{f}(\bar{2}) = \bar{2}^3 - \bar{2}\cdot\bar{2}^2 + \bar{4} = \bar{4} \neq \bar{0}$, $\bar{f}(\bar{3}) = \bar{3}^3 - \bar{2}\cdot\bar{3}^2 + \bar{4} = \overline{13} = \bar{3} \neq \bar{0}$ und $\bar{f}(\bar{4}) = \bar{4}^3 - \bar{2}\cdot\bar{4}^2 + \bar{4} = \overline{36} = \bar{6} \neq \bar{0}$. Wegen $\mathrm{grad}(\bar{f}) = 3$ folgt daraus die Irreduzibilität von $\bar{f}$ über $\mathbb{F}_5$. Weil auch $\mathbb{F}_5[x]$ ein Hauptidealring ist, folgt daraus, dass $(\bar{f})$ in $\mathbb{F}_5[x]$ ein maximales Ideal und der Faktorring $\mathbb{F}_5[x]/(\bar{f})$ ein Körper ist.