Aufgabe F19T2A3 (12 Punkte)

(a) Sei $m \geq 1$ eine ungerade ganze Zahl. Zeigen Sie, dass

$$1^m + 2^m + ... + (m-1)^m \equiv 0 \bmod m.$$

(b) Sei $m \in \mathbb{N}$ und seien $x_1, x_2, ..., x_m$ ganze Zahlen. Zeigen Sie, dass es eine nichtleere Teilmenge $I \subseteq \{1, 2, ..., m\}$ gibt, so dass

$$\sum_{i \in I} x_i \equiv 0 \bmod m.$$

Hinweis: zu (a) Betrachten Sie geeignete Paare von Summanden.
zu (b) Betrachten Sie $x_1, x_1 + x_2, ..., x_1 + ... + x_m$.

Hinweis/Kommentar:

In Teil (a) verwenden Sie $-k \equiv m - k \bmod m$ für $1 \leq k \leq m-1$. Für Teil (b) beachten Sie, dass es nur $m-1$ verschiedene Kongruenzklassen $\bar{a}$ in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ mit $\bar{a} \neq \bar{0}$ gibt.