Aufgabe F19T2A3 (12 Punkte)

(a) Sei $m \geq 1$ eine ungerade ganze Zahl. Zeigen Sie, dass

$$1^m + 2^m + ... + (m-1)^m \equiv 0 \bmod m.$$

(b) Sei $m \in \mathbb{N}$ und seien $x_1, x_2, ..., x_m$ ganze Zahlen. Zeigen Sie, dass es eine nichtleere Teilmenge $I \subseteq \{1, 2, ..., m\}$ gibt, so dass

$$\sum_{i \in I} x_i \equiv 0 \bmod m.$$

Hinweis: zu (a) Betrachten Sie geeignete Paare von Summanden.
zu (b) Betrachten Sie $x_1, x_1 + x_2, ..., x_1 + ... + x_m$.

Lösung:

zu (a) Da m ungerade ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $m = 2n+1$. Für $1 \leq k \leq n$ gilt $m - k \equiv -k \bmod m$ und somit auch $(m-k)^m \equiv (-k)^m \equiv (-1)^m k^m \equiv -k^m \bmod m$ (wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass m ungerade und somit $(-1)^m = -1$ ist). Damit erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{m-1} k^m \equiv \sum_{k=1}^{n} k^m + \sum_{k=n+1}^{m-1} k^m \equiv \sum_{k=1}^{n} k^m + \sum_{k=1}^{n} (m-k)^m \equiv \sum_{k=1}^{n} k^m + \sum_{k=1}^{n} (-k^m)$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{n} (k^m + (-k^m)) \equiv \sum_{k=1}^{n} 0 \equiv 0 \bmod m.$$

zu (b) Wir unterscheiden zwei Fälle. Gilt $\sum_{k=1}^{\ell} x_k \equiv 0 \bmod m$ für ein $\ell \in \{1, ..., m\}$, dann können wir $I = \{1, 2, ..., \ell\}$ setzen und erhalten $\sum_{i \in I} x_i \equiv 0 \bmod m$. Ansonsten liegt jede Zahl $\sum_{k=1}^{\ell} x_k$ mit $1 \leq \ell \leq m$ in einer Restklasse $a + m\mathbb{Z}$ mit $1 \leq a \leq m-1$. Weil es nur $m-1$ solche Restklassen gibt, müssen mindestens zwei dieser Zahlen in derselben Restklasse liegen. Es gibt also $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}$ mit $1 \leq \ell_1 < \ell_2 \leq m-1$ und

$$\sum_{k=1}^{\ell_1} x_k \equiv \sum_{k=1}^{\ell_2} x_k \bmod m$$

was zu $\sum_{k=\ell_1+1}^{\ell_2} x_k \equiv \sum_{k=1}^{\ell_2} x_k - \sum_{k=1}^{\ell_1} x_k \equiv 0 \bmod m$ äquivalent ist. Setzen wir in diesem Fall also $I = \{\ell_1 + 1, \ell_1 + 2, ..., \ell_2\}$, dann ist $\sum_{i \in I} x_i \equiv 0 \bmod m$ erfüllt.