Aufgabe F19T2A2 (12 Punkte)

Es sei $G \neq \{1_G\}$ eine endliche Gruppe, für welche die Automorphismengruppe $A = \mathrm{Aut}(G)$ transitiv auf $G \setminus \{1_G\}$ operiert. Das heißt für alle $g, h \in G \setminus \{1_G\}$ gibt es ein $\alpha \in A$ mit $\alpha(g) = h$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine Primzahl p, so dass $g^p = 1_G$ für alle $g \in G$ ist.

(b) $Z(G) \neq \{1_G\}$ (Hier ist $Z(G) = \{g \in G \mid xg = gx \text{ für alle } x \in G\}$ das Zentrum von G.)

(c) Die Gruppe G ist abelsch.

Hinweis/Kommentar:

Für Teil (a) verwenden Sie, dass die Ordnung von Gruppenelementen unter Automorphismen erhalten bleibt, und für Teil (b), dass p-Gruppen ein nichttriviales Zentrum haben. In Teil (c) ist zu überprüfen, dass jeder Automorphismus einer Gruppe Elemente der Zentrums auf ebensolche Elemente abbildet.