Aufgabe F19T2A2 (12 Punkte)

Es sei $G \neq \{1_G\}$ eine endliche Gruppe, für welche die Automorphismengruppe $A = \mathrm{Aut}(G)$ transitiv auf $G \setminus \{1_G\}$ operiert. Das heißt für alle $g, h \in G \setminus \{1_G\}$ gibt es ein $\alpha \in A$ mit $\alpha(g) = h$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine Primzahl p, so dass $g^p = 1_G$ für alle $g \in G$ ist.

(b) $Z(G) \neq \{1_G\}$ (Hier ist $Z(G) = \{g \in G \mid xg = gx \text{ für alle } x \in G\}$ das Zentrum von G.)

(c) Die Gruppe G ist abelsch.

Lösung:

zu (a) Sei p ein Primteiler von $|G|$. Nach dem Lemma von Cauchy gibt es dann ein $g \in G$ mit $\mathrm{ord}(g) = p$. Sei h nun ein beliebiges Element aus G. Im Fall $h = 1_G$ ist $h^p = 1_G$ offenbar erfüllt. Andernfalls gibt es auf Grund der Voraussetzung ein $\alpha \in A$ mit $\alpha(g) = h$. Weil die Ordnung von Gruppenelementen unter Automorphismen erhalten bleibt, gilt $\mathrm{ord}(h) = \mathrm{ord}(g) = p$ und somit $h^p = 1_G$. Damit ist nachgewiesen, dass $h^p = 1_G$ für alle $h \in G$ erfüllt ist.

zu (b) Die Gruppe G ist eine p-Gruppe. Denn andernfalls gäbe es eine von p verschiedene Primzahl q mit $q \mid |G|$. Nach dem Lemma von Cauchy würde dann ein Element $h \in G$ mit $\mathrm{ord}(h) = q$ existieren, und wegen $q \nmid p$ wäre $h^p \neq 1_G$. Somit würde sich ein Widerspruch zu Teil (a) ergeben. Nun besitzen p-Gruppen laut Vorlesung ein nichttriviales Zentrum. Deshalb gilt $Z(G) \neq \{1_G\}$.

zu (c) Es genügt zu zeigen, dass $Z(G) = G$ gilt. Sei dazu $h \in G$ vorgegeben und g ein beliebig gewähltes Element in $Z(G) \setminus \{1_G\}$; nach Teil (b) ist diese Menge nicht leer. Wir zeigen, dass h ebenfalls in $Z(G)$ liegt. Sei dazu $k \in G$ ein beliebiges Element. Zu zeigen ist $hk = kh$. Im Fall $k = 1_G$ ist diese Gleichung offenbar erfüllt, denn dann gilt $hk = h \cdot 1_G = h = 1_G \cdot h = kh$. Betrachten wir nun den Fall $k \neq 1_G$. Nach Voraussetzung existiert ein $\alpha \in A$ mit $\alpha(g) = h$. Setzen wir $k' = \alpha^{-1}(k)$, dann folgt aus $g \in Z(G)$ die Gleichung $gk' = k'g$, außerdem gilt $\alpha(k') = k$ und somit

$$hk \quad = \quad \alpha(g)\alpha(k') \quad = \quad \alpha(gk') \quad = \quad \alpha(k'g) \quad = \quad \alpha(k')\alpha(g) \quad = \quad kh.$$

Damit ist $h \in Z(G)$ nachgewiesen.