Aufgabe F19T2A1 (12 Punkte)

Eine *Kruppe* ist ein Paar $(K, \cdot)$, bestehend aus einer Menge K und einer Abbildung $\cdot : K \times K \to K$, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

(K1) Es gibt ein $e \in K$ mit $x \cdot e = x$ für alle $x \in K$.

(K2) Die Verknüpfung „$\cdot$“ ist assoziativ.

(K3) Für jedes $x \in K$ sind die folgenden Abbildungen injektiv:

$$K \to K\ ,\ y \mapsto x \cdot y \qquad , \qquad K \to K\ ,\ y \mapsto y \cdot x$$

Sei nun $(K, \cdot)$ eine Kruppe.

(a) Zeigen Sie: $e \cdot x = x$ für alle $x \in K$

(b) Zeigen Sie: Sind $x, y \in K$ mit $y \cdot x = x$, so folgt $y = e$.

(c) Zeigen Sie: Ist K endlich, so ist $(K, \cdot)$ eine Gruppe.

(d) Ist $(\mathbb{N}_0, +)$ eine Kruppe? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis/Kommentar:

Das Axiom (K3) besagt, dass in $(K, \cdot)$ Kürzungsregeln der Form $xy = xz \Rightarrow y = z$ und $yx = zx \Rightarrow y = z$ gelten. Damit lassen sich (a) und (b) einfach lösen. In Teil (c) verwenden Sie, dass jede injektive Abbildung zwischen zwei endlichen, gleichmächtigen Mengen surjektiv ist.