Aufgabe F19T2A1 (12 Punkte)

Eine *Kruppe* ist ein Paar $(K, \cdot)$, bestehend aus einer Menge K und einer Abbildung $\cdot : K \times K \to K$, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

(K1) Es gibt ein $e \in K$ mit $x \cdot e = x$ für alle $x \in K$.

(K2) Die Verknüpfung „$\cdot$“ ist assoziativ.

(K3) Für jedes $x \in K$ sind die folgenden Abbildungen injektiv:

$$K \to K \ , \ y \mapsto x \cdot y \qquad , \qquad K \to K \ , \ y \mapsto y \cdot x$$

Sei nun $(K, \cdot)$ eine Kruppe.

(a) Zeigen Sie: $e \cdot x = x$ für alle $x \in K$

(b) Zeigen Sie: Sind $x, y \in K$ mit $y \cdot x = x$, so folgt $y = e$.

(c) Zeigen Sie: Ist K endlich, so ist $(K, \cdot)$ eine Gruppe.

(d) Ist $(\mathbb{N}_0, +)$ eine Kruppe? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

zu (a) Es gilt $x \cdot (e \cdot x) = (x \cdot e) \cdot x = x \cdot x$. Weil die Abbildung $K \to K$, $y \mapsto x \cdot y$ injektiv ist, folgt daraus $e \cdot x = x$.

zu (b) Seien $x, y \in K$ mit $y \cdot x = x$ vorgegeben. Wegen (a) gilt $e \cdot x = x$, also folgt $y \cdot x = e \cdot x$. Weil die Abbildung $K \to K$, $z \mapsto z \cdot x$ injektiv ist, folgt daraus wiederum $y = e$.

zu (c) Wir überprüfen die Gruppenaxiome für $(K, \cdot)$. Nach (K2) ist „$\cdot$“ assoziativ. Nach (K1) gibt es ein $e \in K$ mit $x \cdot e = x$ für alle $x \in K$, und nach Teil (a) ist auch $e \cdot x = x$ für alle $x \in K$ erfüllt. Also ist e in $(K, \cdot)$ ein Neutralelement. Es bleibt zu zeigen, dass jedes $y \in K$ in $(K, \cdot)$ ein Inverses besitzt. Sei dazu $y \in K$ vorgegeben. Die Abbildung $K \to K$, $x \mapsto x \cdot y$ ist nach (K3) injektiv. Weil K endlich ist, ist die Abbildung auch surjektiv. Insbesondere gibt es ein $x_1 \in K$ mit $x_1 \cdot y = e$. Genauso folgt aus der Injektivität von $K \to K$, $x \to y \cdot x$ die Existenz eines $x_2 \in K$ mit $y \cdot x_2 = e$. Nun gilt

$$x_1 \quad = \quad x_1 \cdot e \quad = \quad x_1 \cdot (y \cdot x_2) \quad = \quad (x_1 \cdot y) \cdot x_2 \quad = \quad e \cdot x_2 \quad = \quad x_2.$$

Aus $x_1 = x_2$ wiederum folgt $x_1 \cdot y = y \cdot x_1 = e$. Also ist x_1 ein zu y inverses Element. Damit sind alle Gruppenaxiome für $(K, \cdot)$ nachgewiesen.

zu (d) Ja. Es gilt $n + 0 = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist (K1) für $e = 0$ erfüllt. Bekanntlich erfüllt die Verknüpfung $+$ auf ganz $\mathbb{R}$ und damit auch auf $\mathbb{N}_0$ das Assoziativgesetz, also gilt auch (K2). Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Abbildung $K \to K$, $p \mapsto m + p$ injektiv. Sind nämlich $p, q \in \mathbb{N}_0$ mit $m + p = m + q$, dann folgt $m + p + (-m) = m + q + (-m)$ und $p = q$. Auch ist $K \to K$, $p \mapsto p + m$ injektiv, denn für beliebige $p, q \in \mathbb{N}_0$ folgt aus $p + m = q + m$ die Gleichung $p + m + (-m) = q + m + (-m)$ und damit $p = q$. Damit ist auch (K3) nachgewiesen.