Aufgabe F19T1A5 (12 Punkte)

Es sei α die reelle Zahl $\sqrt[3]{2+\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$, und es sei ζ die primitive dritte Einheitswurzel $e^{2\pi i/3} \in \mathbb{C}$.

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom f von α über $\mathbb{Q}$.

(b) Es sei $\beta = \sqrt[3]{2-\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für den Zerfällungskörper $L \subseteq \mathbb{C}$ von f in $\mathbb{C}$ gilt $L = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \zeta)$.

(c) Zeigen Sie, dass die reelle Zahl $\sqrt[3]{2}$ in L liegt, und folgern Sie, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ einen Normalteiler vom Index 6 besitzt.

Hinweis/Kommentar:

Für Teil (a) gehen Sie von der Gleichung $\alpha = \sqrt[3]{2+2\sqrt{2}}$ und beseitigen Sie die Wurzeln durch geeignete Umformungen. Auf diese Weise findet man zumindest ein Polynom $0 \neq f \in \mathbb{Q}[x]$ mit $f(\alpha) = 0$. Für Teil (b) muss zunächst die Menge der komplexen Nullstellen von f bestimmt werden. Vergessen Sie dabei nicht nachzuweisen, dass die sechs angegebenen komplexen Zahlen tatsächlich alle verschieden sind; hierfür kann man zum Beispiel den Absolutbetrag verwenden. Für die zweite Aufgabe in Teil (c) betrachten Sie den Zwischenkörper $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta)$, und verwenden Sie die Ergänzungen zum Hauptsatz der Galoistheorie.