

Aufgabe F19T1A4 (12 Punkte)

Für ein Polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ bezeichne f' die Ableitung und $\deg(f)$ den Grad von f . Ferner sei $n_0(f) \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der verschiedenen Nullstellen von f in \mathbb{C} (also ohne Vielfachheiten gezählt). Zeigen Sie, dass für jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ mit $f \neq 0$ die Gleichung

$$\deg(f) = \deg(\text{ggT}(f, f')) + n_0(f) \quad \text{gilt.}$$

Hinweis/Kommentar:

Jedes Polynom ungleich Null in $\mathbb{C}[x]$ kann in der Form $a \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)^{e_i}$ dargestellt werden, mit $a \in \mathbb{C}^\times$, verschiedenen Elementen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ und $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{N}$. Berücksichtigt man noch, dass die Vielfachheit einer Nullstelle eines Polynoms sich durch Ableiten um 1 reduziert, dann ist es nicht schwierig, denn ggT von f und f' explizit anzugeben. Dies liefert dann unmittelbar die angegebene Gleichung.