Aufgabe F19T1A4 (12 Punkte)

Für ein Polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ bezeichne f' die Ableitung und $\deg(f)$ den Grad von f. Ferner sei $n_0(f) \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der verschiedenen Nullstellen von f in $\mathbb{C}$ (also ohne Vielfachheiten gezählt). Zeigen Sie, dass für jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ mit $f \neq 0$ die Gleichung

$$\deg(f) = \deg(\mathrm{ggT}(f, f')) + n_0(f) \qquad \text{gilt.}$$

Lösung:

Allgemein gilt: Ist K ein Körper, $0 \neq f \in K[x]$ und $a \in K$ eine Nullstelle von f der Vielfachheit $r \in \mathbb{N}$, dann ist a eine Nullstelle der Vielfachheit $r-1$ von f'. Auf Grund der Voraussetzung gilt nämlich $f = (x-a)^r g$ für ein $g \in K[x]$ mit $g(a) \neq 0$. Durch Anwendung der Produktregel erhält man

$$f' \quad = \quad r(x-a)^{r-1}g + (x-a)^r g' \quad = \quad (x-a)^{r-1}(rg + (x-a)g') \quad = \quad (x-a)^{r-1}h$$

mit $h = rg + (x-a)g'$, und es ist $h(a) = rg(a) + (a-a)g' = rg(a) \neq 0$.

Zum Beweis der Gleichung sei nun $f \in \mathbb{C}[x]$ mit $f \neq 0$ vorgegeben. Weil $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, zerfällt f in Linearfaktoren. Es gibt somit ein $n \in \mathbb{N}_0$, Elemente $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$, $e_1, ..., e_n \in \mathbb{N}$ und ein $a \in \mathbb{C}^\times$ mit

$$f \quad = \quad a \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i)^{e_i}$$

wobei jeweils $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $1 \leq i < j \leq n$ gilt. Es sind also $\alpha_1, ..., \alpha_n$ die verschiedenen Nullstellen von f und $e_1, ..., e_n$ ihre Vielfachheiten; somit ist $n_0(f) = n$. Weiter ist $\mathrm{ggT}(f, f')$ ein Teiler von f; es gibt also $e'_1, ..., e'_n \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq e'_i \leq e_i$ für $1 \leq i \leq n$ und

$$\mathrm{ggT}(f, f') \quad = \quad \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i)^{e'_i}.$$

Auf Grund unserer Vorüberlegung ist α_i jeweils eine Nullstelle der Vielfachheit $e_i - 1$ von f', für $1 \leq i \leq n$. Da α_i außerdem eine Nullstelle der Vielfachheit e_i von f ist, wird $\mathrm{ggT}(f, f')$ von $(x - \alpha_i)^{e_i - 1}$, aber nicht von $(x - \alpha_i)^{e_i}$ geteilt. Es gilt also $e'_i = e_i - 1$ für $1 \leq i \leq n$ und somit

$$\mathrm{ggT}(f, f') \quad = \quad \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i)^{e_i - 1}.$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$\deg(\mathrm{ggT}(f, f')) + n_0(f) \quad = \quad \deg\left(\prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i)^{e_i - 1} \right) + n \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} (e_i - 1) + n \quad =$$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i - n + n \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} e_i \quad = \quad \deg(f).$$