Aufgabe F19T1A3 (12 Punkte)

Gegeben sind der Ring $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ und die multiplikative Funktion $N : R \to \mathbb{N}_0$, $N(a + b\sqrt{-3}) = a^2 + 3b^2$. (Die Multiplikativität von N muss nicht gezeigt werden.)

(a) Bestimmen Sie die Einheitengruppe $R^\times$ von R.

(b) Zeigen Sie, dass jedes Element $a + b\sqrt{-3}$ mit $N(a + b\sqrt{-3}) = 4$ irreduzibel ist.

(c) Ist R ein faktorieller Ring? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis/Kommentar:

Die Bestimmung von Einheiten und irreduziblen Elementen in Ringen der Form $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ wurde in der Zahlentheorie-Vorlesung behandelt. Für Teil (c) bietet sich ein Beispiel an, das ebenfalls häufig in der Vorlesung durchgenommen wird: Zeigen Sie, dass 2 in R kein Primelement ist, indem Sie die Gleichungen $4 = 2 \cdot 2 = (1 - \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3})$ betrachten.