Aufgabe F19T1A2 (12 Punkte)

Es seien X die Menge der diagonalisierbaren 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$ und $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ die Gruppe der invertierbaren 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\cdot : G \times X \to X \quad , \quad (B, M) \mapsto BMB^{-1}$$

eine Operation ist.

(b) Ist die Operation aus (a) transitiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Geben Sie ein Repräsentantensystem für die Bahnen der Operation aus (a) an.

Hinweis/Kommentar:

Teil (a) ist reine Routine, für Teil (b) betrachtet man zwei beliebige nicht zueinander ähnliche Matrizen. Für Teil (c) bemerken wir zunächst, dass jede Bahn offenbar mindestens eine Diagonalmatrix enthält; dies folgt direkt aus der Definition der Diagonalisierbarkeit. Allerdings bilden die Diagonalmatrizen noch kein Repräsentantensystem. Beispielsweise sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ähnlich zueinander, liegen also in derselben Bahn. Man kommt aber zum Ziel, indem man in der Menge der Diagonalmatrizen eine geeignete Teilmenge definiert.