Aufgabe F19T1A2 (12 Punkte)

Es seien X die Menge der diagonalisierbaren 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$ und $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ die Gruppe der invertierbaren 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\cdot : G \times X \to X \quad , \quad (B, M) \mapsto BMB^{-1}$$

eine Operation ist.

(b) Ist die Operation aus (a) transitiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Geben Sie ein Repräsentantensystem für die Bahnen der Operation aus (a) an.

Lösung:

zu (a) Seien $B, C \in G$ und $M \in X$ vorgegeben, und sei $E \in G$ die Einheitsmatrix. Zu überprüfen ist $E \cdot M = M$ und $B \cdot (C \cdot M) = (BC) \cdot M$. Tatsächlich gilt $E \cdot M = EME^{-1} = EME = M$ und

$$B \cdot (C \cdot M) \quad = \quad B \cdot (CMC^{-1}) \quad = \quad B(CMC^{-1})B^{-1} \quad = \quad (BC)M(BC)^{-1} \quad = \quad (BC) \cdot M.$$

zu (b) Nein. Wäre dies der Fall, dann gäbe es nur eine Bahn bezüglich dieser Operation. Die Matrizen E und $2E$ sind Diagonalmatrizen, also insbesondere diagonalisierbar und damit Elemente von X. Aus der Annahme, dass nur eine Bahn existiert, folgt $G(E) = G(2E)$ und somit $2E = G(E)$. Es gäbe also ein $B \in G$ mit $2E = BEB^{-1}$. Aber dies steht im Widerspruch zu $BEB^{-1} = BB^{-1} = E \neq 2E$.

zu (c) Wir zeigen, dass die durch die Menge

$$R \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \;,\; a \le b \right\}$$

ein Repräsentantensystem der Bahnen gegeben ist. Zunächst einmal ist jedes Element aus R eine Diagonalmatrix, damit insbesondere diagonalisierbar. Also ist R eine Teilmenge von X. Sei nun $M \in X$ beliebig vorgegeben; wir müssen überprüfen, dass $G(M)$ genau ein Element aus R enthält. Wegen $M \in X$ ist M diagonalisierbar, es gibt also ein $B \in G$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$BMB^{-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Im Fall $a \le b$ gilt $BMB^{-1} \in R$ und $BMB^{-1} = B \cdot M \in G(M)$. Betrachten wir nun den Fall $a > b$. Die Matrix

$$C \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist wegen $\det C = -1 \neq 0$ invertierbar. Darüber hinaus ist $C^{-1} = C$, wegen

$$CC \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad = \quad E.$$

Außerdem gilt

$$C(BMB^{-1})C^{-1} \quad = \quad C(BMB^{-1})C \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad ,$$

Dieses Element liegt wegen $b < a$ in R und wegen $C(BMB^{-1})C^{-1} = (CB)M(CB)^{-1} = (CB) \cdot M$ zugleich in $G(M)$. Damit ist gezeigt, dass $G(M)$ in jedem Fall ein Element aus R enthält.

Nehmen wir nun an, dass $N_1, N_2 \in R$ beide in $G(M)$ enthalten sind,

$$N_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \quad , \quad N_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

mit $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ und $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2$. Wegen $N_1, N_2 \in G(M)$, und weil zwei Bahnen einer Gruppenoperation entweder gleich oder disjunkt sind, folgt $G(N_1) = G(M) = G(N_2)$ und damit $N_2 \in G(N_1)$. Es gibt also ein $B \in G$ mit $N_2 = B \cdot N_1 = BN_1B^{-1}$. Dies zeigt, dass die Matrizen N_1, N_2 ähnlich zueinander sind. Weil ähnliche Matrizen dasselbe charakteristische Polynom besitzen, folgt

$$(x - a_1)(x - b_1) \quad = \quad \chi_{N_1} \quad = \quad \chi_{N_2} \quad = \quad (x - a_2)(x - b_2).$$

Daraus wiederum folgt $\{a_1, b_1\} = \{a_2, b_2\}$. Wegen $a_1 \leq b_1$ und $a_2 \leq b_2$ erhalten wir $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$ und damit $N_1 = N_2$. Dies zeigt, dass die Bahn $G(M)$ nicht mehr als ein Element aus R enthält.