

Aufgabe F19T1A1 (12 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie das (multiplikative) Inverse von $\overline{47}$ im Restklassenring $\mathbb{Z}/112\mathbb{Z}$.
- (b) Bestimmen Sie eine Zerlegung des Polynoms $2x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2x \in \mathbb{Z}[x]$ in irreduzible Faktoren aus $\mathbb{Z}[x]$.
- (c) Geben Sie drei nichtisomorphe Gruppen der Ordnung 12 an (mit Begründung).
- (d) Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 95 zyklisch ist.

Hinweis/Kommentar:

Teil (a) löst man mit dem Euklidischen Algorithmus, und (d) ist eine Standard-Anwendung der Sylowsätze und des inneren direkten Produkts. In Teil (c) ist zu beachten, dass es bereits zwei Isomorphietypen abelscher Gruppen der Ordnung 12 gibt; einen dritten nicht-abelschen Isomorphietyp findet man, indem man sich in den symmetrischen Gruppen umsieht. Für Teil (b) kann man zunächst eine Zerlegung des Polynoms in $\mathbb{Q}[x]$ in irreduzible Faktoren bestimmen. Beachten Sie aber anschließend, dass Einheiten in $\mathbb{Z}[x]$ liegende Einheiten von $\mathbb{Q}[x]$ im Allgemeinen keine Einheiten von $\mathbb{Z}[x]$ sind.