Aufgabe F18T3A3 (12 Punkte)

Für eine endliche Gruppe G und eine Primzahl p, die die Ordnung von G teilt, bezeichnen wir mit n_p die Anzahl der p-Sylowgruppen in G.

(a) Es seien G eine endliche Gruppe und $p, q \in \mathbb{N}$ zwei verschiedene Primzahlen, die die Ordnung von G teilen. Angenommen, $n_p = n_q = 1$. Es seien H_1 die einzige p-Sylowgruppe und H_2 die einzige q-Sylowgruppe in G. Zeigen Sie, dass die Elemente von H_1 und H_2 miteinander kommutieren, d.h. für alle $x \in H_1$ und $y \in H_2$ gilt $xy = yx$.

(b) Es sei G eine Gruppe der Ordnung 12.

(i) Zeigen Sie, dass nicht gleichzeitig $n_2 = 3$ und $n_3 = 4$ gelten kann.

(ii) Zeigen Sie, dass im Fall $n_2 = n_3 = 1$ die Gruppe G abelsch ist und es bis auf Isomorphie genau zwei verschiedene Möglichkeiten für G gibt.

Lösung:

zu (a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass H_1 als einzige p-Sylowgruppe ein Normalteiler von G ist. Aus demselben Grund gilt auch $H_2 \trianglelefteq G$. Die Ordnung von H_1 ist eine p-Potenz und somit teilerfremd zur Ordnung von H_2, die eine q-Potenz ist. Daraus folgt $H_1 \cap H_2 = \{e_G\}$, wobei e_G das Neutralelement von G bezeichnet. Seien nun $x \in H_1$ und $y \in H_2$ vorgegeben. Die Gleichung $xy = yx$ ist äquivalent zu $xyx^{-1}y^{-1} = e_G$. Aus der Normalteiler-Eigenschaft von H_1 und wegen $x^{-1} \in H_1$ folgt $yx^{-1}y^{-1} \in H_1$ und damit auch $x(yx^{-1}y^{-1}) \in H_1$. Aus der Normalteiler-Eigenschaft von H_2 folgt ebenso $xyx^{-1} \in H_2$ und $(xyx^{-1})y^{-1} \in H_2$. Insgesamt ist $xyx^{-1}y^{-1}$ damit ein Element von $H_1 \cap H_2 = \{e_G\}$, und wir erhalten $xyx^{-1}y^{-1} = e_G$ wie gewünscht.

zu (b)(i) Nehmen wir an, dass zugleich $n_2 = 3$ und $n_3 = 4$ erfüllt ist. Wegen $|G| = 2^2 \cdot 3^1$ sind die 3-Sylowgruppen genau die Untergruppen der Ordnung 3 und die 2-Sylowgruppen genau die Untergruppen der Ordnung $2^2 = 4$ von G. Jedes Element g der Ordnung 3 in G ist in genau einer 3-Sylowgruppe von G enthalten, nämlich in $\langle g \rangle$. Andererseits ist jede 3-Sylowgruppe als Gruppe von Primzahlordnung zyklisch und enthält genau $\varphi(3) = 2$ Elemente der Ordnung 3. Insgesamt gibt es in G damit $2n_3 = 8$ Elemente der Ordnung 3. Seien P und Q zwei verschiedene 2-Sylowgruppen von G. Wegen $|P| = |Q| = 4$, und weil $P \cap Q$ eine gemeinsame echte Untergruppe von P und Q ist, gilt $|P \cap Q| \leq 2$. Daraus folgt

$$|P \cup Q| \quad = \quad |P| + |Q| - |P \cap Q| \quad \geq \quad 4 + 4 - 2 \quad = \quad 6.$$

Weil $P \cup Q$ nur Elemente der Ordnung 1, 2 und 4 enthält, ist damit insgesamt gezeigt, dass in G mindestens $8 + 6 = 14$ Elemente existieren. Aber dies widerspricht der Voraussetzung $|G| = 12$. Also ist der Fall $n_2 = 3$ und $n_3 = 4$ ausgeschlossen.

zu (b)(ii) Setzen wir $n_2 = n_3 = 1$ voraus, und sei P die einzige 2- sowie Q die einzige 3-Sylowgruppe von G. Wir zeigen zunächst, dass das Komplexprodukt $H = PQ$ ein inneres direktes Produkt von P und Q ist. Dazu müssen wir überprüfen, dass $P \cap Q = \{e_G\}$ sowie $P \trianglelefteq H$ und $Q \trianglelefteq H$ gilt. Die erste Bedingung ist erfüllt, weil die Ordnungen $|P| = 4$ und $|Q| = 3$ teilerfremd sind. Wegen $n_2 = 1$ und auf Grund des Zweiten Sylowsatzes gilt $P \trianglelefteq G$, und aus $n_3 = 1$ folgt ebenso $Q \trianglelefteq G$. Wegen $P, Q \subseteq H \subseteq G$ folgt daraus unmittelbar $P, Q \trianglelefteq H$.

Nun ist H als inneres direktes Produkt von P und Q isomorph zum äußeren direkten Produkt dieser Gruppen, es gilt also $H \cong P \times Q$. Wegen $|H| = |P||Q| = 4 \cdot 3 = 12 = |G|$ und $H \subseteq G$ folgt $G = H$ und somit $G \cong P \times Q$. Als Gruppe von Primzahlordnung ist Q zyklisch, es gilt also $Q \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Als Gruppe von Primzahlquadratordnung ist P zumindest abelsch, und nach dem Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen isomorph zu einem äußeren direkten Produkt zyklischer Gruppen. Weil das Produkt der Ordnungen dieser Gruppen 4 ergeben muss und wir voraussetzen können, dass jeder Faktor nichttrivial ist, ergeben sich die beiden Möglichkeiten $P \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $P \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Für G gibt es also nur die beiden Möglichkeiten

$$G \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \qquad \text{oder} \qquad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Insbesondere ist G abelsch. Es bleibt zu zeigen, dass die beiden Gruppen $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ nicht isomorph zueinander sind. Nach dem Chinesischen Restsatz folgt aus $\mathrm{ggT}(4,3) = 1$ die Isomorphie $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, diese Gruppe ist also zyklisch. Wäre auch $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ zyklisch, dann gäbe es in dieser Gruppe ein Element $g = (a,b,c)$ der Ordnung 12, mit $a,b \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $c \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Da aber stets $6g = (\overline{6a}, \overline{6b}, \overline{6c}) = (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0})$ gilt, ist die Ordnung jedes Elements von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ein Teiler von 6. Also ist diese Gruppe nicht zyklisch, und folglich sind die beiden angegebenen Gruppen nicht isomorph.