Aufgabe F18T3A2 (12 Punkte)

In der Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ der invertierbaren Matrizen über $\mathbb{Q}$ wähle

$$a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass a und b endliche Ordnungen haben, und bestimmen Sie diese Ordnungen.

(b) Zeigen Sie, dass $c = ab$ keine endliche Ordnung hat.

Lösung:

zu (a) Das Neutralelement der Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ ist die Einheitsmatrix. Aus

$$a \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad a^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad a^4 = (a^2)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

folgt $\mathrm{ord}(a) = 4$. Ebenso zeigt die Rechnung

$$b \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad b^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$b^3 = b^2 \cdot b = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad b^6 = (b^3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dass $\mathrm{ord}(b) = 6$ gilt. Insbesonderen sind die Ordnungen der beiden Elemente endlich.

zu (b) Das Element $c = ab$ ist gegeben durch

$$c = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir beweisen durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$c^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $n = 1$ ist die Gleichung offenbar erfüllt. Setzen wir die Gleichung für vorgegebenes $n \in \mathbb{N}$ voraus, dann erhält man sie für $n + 1$ durch die Rechnung

$$c^{n+1} = c^n \cdot c = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1-n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung zeigt, dass insbesondere c^n für kein $n \in \mathbb{N}$ mit der Einheitsmatrix, also dem Neutralelement von G, übereinstimmt. Laut Vorlesung folgt daraus, dass c ein Element unendlicher Ordnung ist.