Aufgabe F18T3A1 (12 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Nullteiler und alle Einheiten im Ring $\mathbb{Z}/(12)$.

(b) Bestimmen Sie die Mächtigkeit des Kerns einer surjektiven linearen Abbildung $\psi : \mathbb{F}_5^3 \to \mathbb{F}_5^2$, wobei $\mathbb{F}_5$ ein Körper mit 5 Elementen ist.

(c) Gegeben Sie die Permutation $\varphi \in S_9$ mit folgender Wertetabelle:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\varphi(k)$	5	9	6	8	4	2	1	7	3

Schreiben Sie φ als Produkt von elementfremden Zykeln, und bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl $k \geq 1$ mit $\varphi^k = \mathrm{id}$.

(d) Es sei U der Untervektorraum

$$U = \mathrm{span}(x-1,\ x^2-x,\ x^2-1,\ x^{10}+x^8,\ x^{10}-x^6)$$

von $V = \mathbb{R}[x]$ (der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$). Bestimmen Sie die Dimension von U.

Lösung:

zu (a) Nach Definition ist $\mathbb{Z}/(12) = \{\bar{0}, \bar{1}, ..., \overline{11}\}$, wobei jeweils $\bar{a} = a + 12\mathbb{Z}$ ist. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass es sich bei $a + 12\mathbb{Z}$ genau dann um eine Einheit des Rings handelt, wenn $\mathrm{ggT}(a, 12) = 1$ gilt. Die Menge der Einheiten ist also gegeben durch $\{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{11}\}$. Die Gleichungen $\bar{0} \cdot \bar{1} = \bar{0}$, $\bar{2} \cdot \bar{6} = \bar{0}$, $\bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{0}$, $\bar{8} \cdot \bar{3} = \bar{0}$, $\bar{9} \cdot \bar{4} = \bar{0}$, $\overline{10} \cdot \bar{6} = \bar{0}$ zeigen, dass die übrigen Elementen $\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}$ alles Nullteiler sind. (Alternativ kann man verwenden, dass in jedem *endlichen* Ring jedes Element entweder Einheit oder Nullteiler ist. Dies wird zwar nicht in der Vorlesung, häufig aber in den Übungen gezeigt.)

zu (b) Nach dem Dimensionssatz für lineare Abbildungen gilt $\dim \ker(\psi) + \dim \mathrm{im}(\psi) = \dim \mathbb{F}_5^3 = 3$. Weil ψ surjektiv ist, gilt $\dim \mathrm{im}(\psi) = \dim \mathbb{F}_5^2 = 2$. Daraus folgt $\dim \ker(\psi) = 3 - 2 = 1$. Jeder eindimensionale $\mathbb{F}_5$-Vektorraum ist isomorph zu $\mathbb{F}_5^1 = \mathbb{F}_5$. Damit erhalten wir $|\ker(\psi)| = |\mathbb{F}_5| = 5$.

zu (c) In der Vorlesung wurde gezeigt, mit welchem allgemeinen Verfahren man die Zykelschreibweise ermittelt. Man beginnt mit dem Element 1 und lesen aus der Tabelle nacheinander die Werte $\psi(1), \psi(\psi(1)), ...$ ab. Auf diese erhält man den ersten Zykel. Anschließend fährt man mit dem kleinsten Element aus $\{1, ..., 9\}$ fort, das in diesem Zykel nicht vorkommt. Auf diese Weise erhält man die Darstellung

$$\varphi \quad = \quad (1\ \ 5\ \ 4\ \ 8\ \ 7)(2\ \ 9\ \ 3\ \ 6).$$

Laut Vorlesung ist die Ordnung eines Elements $\sigma \in S_n$ gegeben durch das kgV der Zykellängen, wenn σ als Produkt elementfreier Zykel dargestellt ist. Damit erhält man $\mathrm{ord}(\varphi) = \mathrm{kgV}(5, 4) = 20$.

zu (d) Die Gleichung $x^2 - 1 = 1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (x^2 - x)$ zeigt zunächst, dass das Element $x^2 - 1$ für die Erzeugung von U redundant ist, dass also $U = \mathrm{span}(x - 1, x^2 - x, x^{10} + x^8, x^{10} - x^6)$ gilt. Wenn wir zeigen können, dass das Tupel $(x - 1, x^2 - x, x^{10} + x^8, x^{10} - x^6)$ linear unabhängig ist, dann handelt es sich um eine vierelementige (geordnete) Basis von U, und daraus wiederum folgt $\dim U = 4$.

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit seien $\lambda_1, ..., \lambda_4 \in \mathbb{R}$ vorgegeben mit

$$\lambda_1(x-1) + \lambda_2(x^2 - x) + \lambda_3(x^{10} + x^8) + \lambda_4(x^{10} - x^6) \quad = \quad 0.$$

Dann folgt

$$\lambda_1 \cdot 1 + (\lambda_1 - \lambda_2)x + \lambda_2 x^2 + (-\lambda_4)x^6 + \lambda_3 x^8 + (\lambda_3 + \lambda_4)x^{10} = 0.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $\lambda_1 = \lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_2 = (-\lambda_4) = \lambda_3 = \lambda_3 + \lambda_4 = 0$ und damit $\lambda_k = 0$ für $1 \leq k \leq 4$. Damit ist die lineare Unahbängigkeit nachgewiesen.