Aufgabe F18T2A5 (12 Punkte)

Das *Zentrum* einer (multiplikativ geschriebenen) Gruppe G ist die Untergruppe

$$Z(G) \quad = \quad \{z \in G \mid \forall\, g \in G : gz = zg\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $Z(G)$ ein Normalteiler von G ist.

(b) Sei D die Diedergruppe der Ordnung 12. Bestimmen Sie $Z(D)$.

(c) Bestimmen Sie die Struktur der Faktorgruppe $D/Z(D)$.

Lösung:

zu (a) Zunächst überprüfen wir, dass $Z(G)$ eine Untergruppe von G ist. Sei e_G das Neutralelement von G. Wegen $ge_G = g = e_G g$ für alle $g \in G$ ist e_G in $Z(G)$ enthalten. Seien nun $z_1, z_2 \in Z(G)$ und $g \in G$ beliebig vorgegeben. Dann gilt $gz_1 = z_1 g$, $gz_2 = z_2 g$ und außerdem $g^{-1}z_1 = z_1 g^{-1}$. Es folgt

$$g(z_1z_2) \quad = \quad (gz_1)z_2 \quad = \quad (z_1g)z_2 \quad = \quad z_1(gz_2) \quad = \quad (z_1z_2)g$$

sowie $gz_1^{-1} = (z_1g^{-1})^{-1} = (g^{-1}z_1)^{-1} = z_1^{-1}g$. Damit sind die Bedingungen $z_1z_2 \in Z(G)$ und $z_1^{-1} \in Z(G)$ nachgewiesen und der Beweis der Untergruppen-Eigenschaft abgeschlossen. Zum Nachweis der Normalteiler-Eigenschaft seien $g \in G$ und $z \in Z(G)$ vorgegeben. Dann gilt $gzg^{-1} = gg^{-1}z = e_G z = z \in Z(G)$. Es folgt $gZ(G)g^{-1} \subseteq Z(G)$ und somit $Z(G) \trianglelefteq G$.

zu (b) Laut Vorlesung besitzt die Diedergruppe $D = D_6$ der Ordnung 12 zwei Elemente $\sigma, \tau \in D$ mit $\mathrm{ord}(\sigma) = 2$, $\mathrm{ord}(\tau) = 6$, $(\sigma\tau)^2 = \mathrm{id}$ und $D_6 = \langle \sigma, \tau \rangle = \{\sigma^j \tau^k \mid j \in \{0,1\}\ ,\ 0 \le k < 6\}$. Aus $\sigma\tau\sigma\tau = \mathrm{id}$ folgt $\sigma\tau\sigma^{-1} = \sigma\tau\sigma = \tau^{-1}$. Weil die Konjugation mit σ ein Automorphismus von D ist, folgt $\sigma\tau^k\sigma^{-1} = \tau^{-k}$ für $0 \le k < 6$. Auf Grund der Äquivalenz

$$\sigma\tau^k = \tau^k\sigma \quad \Leftrightarrow \quad \sigma\tau^k\sigma^{-1} = \tau^k \quad \Leftrightarrow \quad \tau^{-k} = \tau^k$$

ist $\tau^k \in Z(G)$ nur möglich, wenn $\tau^k = \tau^{-k} \Leftrightarrow \tau^{2k} = \mathrm{id}$ gilt, was wegen $\mathrm{ord}(\tau) = 6$ genau für $k \in \{0, 3\}$ erfüllt ist. Weil $Z(D)$ nach (a) eine Untergruppe von D ist, ist $\tau^0 = \mathrm{id}$ auf jeden Fall in $Z(D)$ enthalten. Auch das Element τ^3 liegt in $Z(D)$, denn für $0 \le \ell < 6$ gilt jeweils $\tau^\ell\tau^3 = \tau^{3+\ell} = \tau^3\tau^\ell$ und außerdem

$$(\sigma\tau^\ell)\tau^3 \quad = \quad \sigma\tau^{\ell+3} \quad = \quad (\sigma\tau^{\ell+3}\sigma^{-1})\sigma \quad = \quad (\tau^{\ell+3})^{-1}\sigma \quad = \quad \tau^{-\ell-3}\sigma$$

und wegen $\tau^{-3} = \tau^3$ ebenso

$$\tau^3(\sigma\tau^\ell) \quad = \quad \tau^3\sigma\tau^\ell \quad = \quad \tau^3(\sigma\tau^\ell\sigma^{-1})\sigma \quad = \quad \tau^3\tau^{-\ell}\sigma \quad = \quad \tau^{3-\ell}\sigma \quad = \quad \tau^{-\ell-3}\sigma$$

also $(\sigma\tau^\ell)\tau^3 = \tau^3(\sigma\tau^\ell)$, wobei wiederum verwendet wurde, dass die Konjugation mit einem Gruppenelement ein Gruppenautomorphismus ist. Ingesamt gilt also $Z(D) = \{\mathrm{id}, \tau^3\}$, dies ist ein Normalteiler der Ordnung 2 von D.

zu (c) Nach dem Satz von Lagrange gilt

$$|D/Z(D)| \quad = \quad (D:Z(D)) \quad = \quad \frac{|D|}{|Z(D)|} \quad = \quad \frac{12}{2} \quad = \quad 6.$$

Es gibt bis auf Isomorphie nur zwei Gruppen der Ordnung 6, nämlich die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und die symmetrische Gruppe S_3. (Das kann als bekannt vorausgesetzt werden. Ein Beweis ist mit dem Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen und den Sylowsätzen möglich, indem man die Gruppe auf der Menge ihrer 3-Sylowgruppen operieren lässt.) Wenn wir zeigen können, das $D/Z(D)$ nicht abelsch ist, dann folgt also $D/Z(D) \cong S_3$. Wäre $D/Z(D)$ abelsch, dann müsste $\sigma Z(D) \cdot \tau Z(D) = \tau Z(D) \cdot \sigma Z(D)$ gelten, was zu $\sigma\tau Z(D) = \tau\sigma Z(D)$ und zu $(\tau\sigma)^{-1}(\sigma\tau) \in Z(D)$ äquivalent ist. Aus $\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^{-1} \Leftrightarrow \tau = \sigma^{-1}\tau^{-1}\sigma$ folgt aber

$$(\tau\sigma)^{-1}(\sigma\tau) \quad = \quad \sigma^{-1}\tau^{-1}\sigma\tau \quad = \quad \tau^2 \quad ,$$

und dies ist kein Element von $Z(D) = \{\mathrm{id}, \tau^3\}$. Somit ist $D/Z(D)$ nicht abelsch.