Aufgabe F18T2A3 (12 Punkte)

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die der Faktorring $R = \mathbb{R}[x]/(x^2 - a)$

(a) ein Integritätsbereich ist;

(b) ein Körper ist;

(c) isomorph zum Produktring $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist.

Lösung:

zu (a) Der Faktorring $\mathbb{R}[x]/(x^2 - a)$ ist laut Vorlesung genau dann ein Integritätsbereich, wenn das Ideal $(x^2 - a)$ ein Primideal ist. Da es sich bei $\mathbb{R}[x]$ als Polynomring über einem Körper um einen Hauptidealring handelt, ist dies gleichbedeutend damit, dass $x^2 - a$ entweder gleich dem Nullideal oder in $\mathbb{R}[x]$ ein irreduzibles Element ist. (In jedem Integritätsbereich ist das Nullideal ein Primideal.) Die erste Bedingung ist nie erfüllt, weil das Polynom $x^2 - a$ für kein $a \in \mathbb{R}$ gleich dem Nullpolynom ist. Wegen $\text{grad}(x^2 - a) = 2$ ist die zweite Bedingung äquivalent dazu, dass $x^2 - a$ in $\mathbb{R}$ keine Nullstelle besitzt. Dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn a negativ ist. Die gesuchte Menge ist also die Menge der negativen reellen Zahlen.

zu (b) Der Faktorring $\mathbb{R}[x]/(x^2 - a)$ ist laut Vorlesung genau dann ein Körper, wenn das Ideal $(x^2 - a)$ maximal ist. Da es sich bei $\mathbb{R}[x]$ als Polynomring über einem Körper um einen Hauptidealring handelt, ist dies gleichbedeutend damit, dass $x^2 - a$ in $\mathbb{R}[x]$ ein irreduzibles Element ist. Wie wir in Teil (a) gesehen haben, ist dies genau dann der Fall, wenn a negativ ist. Die gesuchte Menge ist also wiederum die Menge der negativen reellen Zahlen.

zu (c) Der Produktring $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist kein Integritätsbereich (erst recht kein Körper), denn $(1, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist ein Nullteiler ungleich Null: Das Nullelement des Rings ist gegeben durch $0_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = (0, 0)$, es gilt $(1, 0) \neq (0, 0)$, $(0, 1) \neq (0, 0)$ und $(1, 0) \cdot (0, 1) = (1 \cdot 0, 0 \cdot 1) = (0, 0)$. Nach Teil (a) ist der Faktorring $R = \mathbb{R}[x]/(x^2 - a)$ also für negatives $a \in \mathbb{R}$ jedenfalls nicht isomorph zu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Betrachten wir nun den Fall $a = 0$. Das Element $\varepsilon = x + (x^2) \in R$ erfüllt $\varepsilon^2 = x^2 + (x^2) = 0 + (x^2) = 0_R$. Wären die Ringe $R = \mathbb{R}[x]/(x^2)$ und $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nun isomorph, dann würde ein Isomorphismus $\phi : R \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ von Ringen existieren, und $\phi(\varepsilon)$ wäre ein Element ungleich Null in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dessen Quadrat gleich Null ist, wegen $\phi(\varepsilon)^2 = \phi(\varepsilon^2) = \phi(0_R) = 0_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$. Aber im Ring $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gibt es kein Element (a, b) ungleich $0_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ mit der Eigenschaft $(a, b)^2 = 0_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$. Denn aus $(a, b) \neq (0, 0)$ folgt $a \neq 0$ oder $b \neq 0$. Dies zeigt, dass zumindest eine Komponente des Elements $(a, b)^2 = (a^2, b^2)$ ungleich Null ist. Somit ist R auch im Fall $a = 0$ nicht isomorph zu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Sei nun $a > 0$. Dann hat das Polynom $x^2 - a$ hat die beiden verschiedenen Nullstellen $\pm\sqrt{a}$. Wegen $\sqrt{a} \neq -\sqrt{a}$ sind die Polynome $x - \sqrt{a}$ und $x + \sqrt{a}$ teilerfremd. Daraus folgt, dass $(x - \sqrt{a})$ und $(x + \sqrt{a})$ zueinander teilerfremde Ideale im Ring $\mathbb{R}[x]$ sind. Das Produkt dieser Ideale ist gegeben durch $((x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})) = (x^2 - a)$. Der Chinesische Restsatz zeigt nun, dass ein Isomorphismus

$$R = \mathbb{R}[x]/(x^2 - a) \quad \cong \quad \mathbb{R}[x]/(x - \sqrt{a}) \times \mathbb{R}[x]/(x + \sqrt{a})$$

von Ringen existiert. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ gilt außerdem $\mathbb{R}[x]/(x-c) \cong \mathbb{R}$, wie mit dem Homomorphiesatz für Ringe gezeigt werden kann. Denn laut Vorlesung ist die Abbildung $\phi_c : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(c)$ ein Ringhomomorphismus, der sogenannte Auswertungshomomorphismus. Dieser ist surjektiv, weil für vorgegebenes $d \in \mathbb{R}$ jeweils $\phi_c(d) = d$ gilt. Der Kern von ϕ_c besteht aus allen Polynomen $f \in \mathbb{R}[x]$ mit $f(c) = 0$, also genau den Polynomen, die durch den Linearfaktor $x - c$ teilbar sind, also den Elementen des Hauptideals $(x - c)$. Damit sind alle Voraussetzungen des Homomorphiesatzes nachgewiesen, und wir erhalten $\mathbb{R}[x]/(x-c) \cong \mathbb{R}$ wie gewünscht. Wenden wir dies auf $c = \sqrt{a}$ und $c = -\sqrt{a}$ an, dann folgt

$$R \quad \cong \quad \mathbb{R}[x]/(x-\sqrt{a}) \times \mathbb{R}[x]/(x+\sqrt{a}) \quad \cong \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Insgesamt ist $\mathbb{R}[x]/(x^2 - a)$ also genau dann isomorph zu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, wenn a positiv ist.