**Aufgabe F18T2A2** (12 Punkte)

Sei $a \in \mathbb{Z}$ und $f = x^3 + ax^2 - (3+a)x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

(a) Zeigen Sie: $f$ ist irreduzibel.

(b) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $f(\alpha) = 0$. Zeigen Sie, dass $f(1/(1-\alpha)) = 0$ ist.

(c) Zeigen Sie: $\mathbb{Q}(\alpha)$ ist eine galoissche Erweiterung von $\mathbb{Q}$.

*Lösung:*

zu (a) In F18T2A1 (a) wurde bereits gezeigt, dass $f$ in $\mathbb{Q}$ keine Nullstelle besitzt. Wegen $\mathrm{grad}(f) = 3$ folgt daraus die Irreduzibilität von $f$ in $\mathbb{Q}[x]$.

zu (b) Zunächst bemerken wir, dass $\alpha \neq 1$ und $\frac{1}{1-\alpha}$ somit ein wohldefiniertes Element von $\mathbb{Q}(\alpha)$ ist. Wäre $\alpha = 1$, dann würde $f(1) = 0$ und somit $1 + a - (3+a) + 1 = 0$ folgen. Aber die linke Seite der Gleichung ist gleich $-1$, woraus $f(1) = -1 \neq 0$ folgt. In ausgeschriebener Form lautet die Gleichung $f(\frac{1}{1-\alpha}) = 0$ nun

$$\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^3 + a\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^2 - (3+a)\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) + 1 \quad = \quad 0.$$

Multiplizieren wir die Gleichung mit $(1-\alpha)^3$, so erhalten wir

$$1 - (3+a)\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^2 + a\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^3 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(1-\alpha)^3 - (3+a)(1-\alpha)^2 + a(1-\alpha) + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$1 - 3\alpha + 3\alpha^2 - \alpha^3 - (3+a)(1 - 2\alpha + \alpha^2) + a(1-\alpha) + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$1 - 3\alpha + 3\alpha^2 - \alpha^3 - 3 + 6\alpha - 3\alpha^2 - a + 2a\alpha - a\alpha^2 + a - a\alpha + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$1 - 3\alpha - \alpha^3 - 3 + 6\alpha + 2a\alpha - a\alpha^2 - a\alpha + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\alpha^3 - a\alpha^2 + (3+a)\alpha - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$-f(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0$$

Damit ist die Gleichung $f(\frac{1}{1-\alpha}) = 0$ bewiesen.

zu (c) Als Nullstelle eines Polynoms $f \in \mathbb{Q}[x]$ ist $\alpha$ algebraisch über $\mathbb{Q}$. Daraus folgt, dass die Erweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$ algebraisch ist. Wegen $\mathrm{char}(\mathbb{Q})$ ist $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$ als algebraische Erweiterung auch separabel.

Um zu zeigen, dass $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$ normal ist, weisen wir nach, dass $\mathbb{Q}(\alpha)$ ein Zerfällungskörper von $f$ über $\mathbb{Q}$ ist. Nach Teil (b) ist neben $\alpha$ auch $\beta = \frac{1}{1-\alpha}$ eine Nullstelle von $f$. Die linearen Polynome $x - \alpha$ und $x - \beta$ sind damit beides Teiler von $f$ in $\mathbb{Q}(\alpha)[x]$. Darüber hinaus gilt $\alpha \neq \beta$, denn ansonsten wäre

$$\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(1-\alpha) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha - \alpha^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 - \alpha + 1 = 0$$

also $g(\alpha) = 0$ mit $g = x^2 - x + 1$. Aber andererseits ist $f$ ein normiertes, irreduzibles Polynom in $\mathbb{Q}[x]$ mit $\alpha$ also Nullstelle, also das Minimalpolynom von $\alpha$ über $\mathbb{Q}$. Demnach kann (nach Definition des Minimalpolynoms) kein Polynom $h \in \mathbb{Q}[x]$ ungleich Null mit $h(\alpha) = 0$ und $\mathrm{grad}(h) < \mathrm{grad}(f)$ existieren. Somit ist $g(\alpha) = 0$ ausgeschlossen, und es folgt $\alpha \neq \beta$.

Dies bedeutet, dass $x - \alpha$ und $x - \beta$ in $\mathbb{Q}[x]$ teilerfremd sind. Aus $(x - \alpha) \mid f$ und $(x - \beta) \mid f$ folgt nun $(x - \alpha)(x - \beta) \mid f$. Es existiert also eine Polynom $h \in \mathbb{Q}(\alpha)[x]$ mit $f = (x - \alpha)(x - \beta)h$, und wegen $\operatorname{grad}(f) = 3$ ist $\operatorname{grad}(h) = 1$. Dies zeigt, dass $f$ im Polynomring $\mathbb{Q}(\alpha)[x]$ in Linearfaktoren zerfällt. Außerdem wird $\mathbb{Q}(\alpha)$ von den Nullstellen des Polynoms $f$ über $\mathbb{Q}$ erzeugt, da der Körper bereits von $\{\alpha\}$ erzeugt wird. Also ist $\mathbb{Q}(\alpha)$ tatsächlich Zerfällungskörper von $f$ über $\mathbb{Q}$. Insgesamt ist $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$ somit normal und separabel, also eine Galois-Erweiterung.