Aufgabe F17T3A3 (12 Punkte)

Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ und $S = \mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$. Man zeige, dass es keinen Ringhomomorphismus $\phi : R \to S$ gibt. (Bemerkung: Ringhomomorphismen $R \to S$ bilden definitionsgemäß 1_R auf 1_S ab.)

Lösung:

Nehmen wir an, dass $\phi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus ist. Dann gilt $\phi(1_R) = 1_S$, hier also $\phi(1) = 1$, und damit auch $\phi(a) = a$ für alle $a \in \mathbb{Z}$, weil in der additiven Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ jeweils $a \cdot 1 = a$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt (wobei $a \cdot 1$ im Fall $a \in \mathbb{N}$ als a-fache Summe $1 + ... + 1$ zu verstehen ist, im Fall $a = 0$ als Neutralelement 0 von $(\mathbb{Z}, +)$ und im Fall $a < 0$ als die $(-n)$-fache Summe $(-1) + ... + (-1)$), und weil ϕ ein Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ ist.

Setzen wir nun $\alpha = \phi(\sqrt{-3})$, dann gilt $\alpha^2 = \phi(\sqrt{-3}^2) = \phi(-3) = -3$. Wegen $\alpha \in S$ gibt es $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha = a + ib$. Wir erhalten $a^2 - b^2 + 2abi = (a + ib)^2 = \alpha^2 = -3$, also $2ab = 0$ und $a^2 - b^2 = -3$. Aus $2ab = 0$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$. Im ersten Fall wäre $a^2 = -3$, im zweiten $-b^2 = -3$, also $b^2 = 3$. Weil aber weder -3 noch 3 Quadrate in $\mathbb{Z}$ sind, ist dies nicht möglich. Die Annahme, dass ein Ringhomomorphismus $\phi : R \to S$ existiert, hat also zu einem Widerspruch geführt.