Aufgabe F17T3A2 (12 Punkte)

Man zeige:

(a) Die symmetrische Gruppe S_5 hat genau sechs 5-Sylowgruppen.

(b) S_6 hat eine zu S_5 isomorphe und transitiv auf $\{1,2,3,4,5,6\}$ operierende Untergruppe.

(c) S_6 hat zwei zu S_5 isomorphe Untergruppen, die nicht zueinander konjugiert sind.

Lösung:

zu (a) Sei ν_5 die Anzahl der 5-Sylowgruppen von S_5. Wegen $|S_5| = 5! = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ und auf Grund der Sylowsätze ist ν_5 ein Teiler von $2^3 \cdot 3 = 24$, also $\nu_5 \in \{1,2,4,8,3,6,12,24\}$. Außerdem gilt $\nu_5 \equiv 1 \mod 5$. Die einzigen Teiler von 24, auf die diese Bedingung zutrifft, sind 1 und 6. Es gilt also $\nu_5 \in \{1,6\}$. Im Fall $\nu_5 = 1$ gäbe es nur eine 5-Sylowgruppe. Weil die 5-Sylowgruppen von S_5 von Ordnung 5 sind, gäbe es damit nur $\varphi(5) = 4$ Elemente der Ordnung 5. Aus der Vorlesung ist aber bekannt, dass bereits die Anzahl der 5-Zykel in S_5 gleich $(5-1)!\binom{5}{5} = 4! = 24$ beträgt. Also muss $\nu_5 = 6$ gelten. (Die 5-Zykel sind in S_5 die einzigen Elemente der Ordnung 5, aber dies war hier nicht relevant.)

zu (b) Sei X die Menge der 5-Sylowgruppen von S_5. Nach Teil (a) gilt $|X| = 6$, somit existiert ein Isomorphismus $\alpha : \mathrm{Per}(X) \to S_6$. Die Operation von S_5 auf X definiert einen Homomorphismus $\phi : S_5 \to \mathrm{Per}(X)$ mit $\alpha(\sigma)(P) = \sigma P \sigma^{-1}$ für alle $\sigma \in S_5$ und $P \in X$. Wir zeigen, dass ϕ injektiv ist. Sei dazu $N = \ker(\phi)$. Als Kern eines Homomorphismus ist N ein Normalteiler von S_5. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass S_5 neben $\{\mathrm{id}\}$, A_5 und S_5 keine weiteren Normalteiler besitzt. Unter der Annahme, dass ϕ nicht injektiv ist, gilt also $N = A_5$ oder $N = S_5$. Daraus folgt $(S_5 : N) \le 2$. Auf Grund des Homomorphiesatzes für Gruppen gilt $S_5/N \cong \mathrm{im}(\phi)$, und es folgt $|\mathrm{im}(\phi)| = |S_5/N| = (S_5 : N) \le 2$.

Andererseits operiert S_5 aber laut Vorlesung transitiv auf der Menge X. Bezeichnen wir mit $P_1, ..., P_6$ die Elemente von X, dann gibt es für $1 \le i \le 6$ jeweils ein $\sigma_i \in S_5$ mit $\phi(\sigma_i)(P_1) = P_i$. Dies zeigt, dass $\mathrm{im}(\phi) = \phi(S_5)$ mindestens 6 verschiedene Elemente enthält. Dieser Widerspruch zu $|\mathrm{im}(\phi)| \le 2$ zeigt, dass ϕ tatsächlich injektiv ist. Damit ist $\alpha \circ \phi$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus $S_5 \to S_6$, also ist $U = (\alpha \circ \phi)(S_5)$ eine zu S_5 isomorphe Untergruppe von S_6. Aus der Transitivität der Operation von S_5 auf X folgt die Transitivität der Operation von U auf $M_6 = \{1,2,...,6\}$. Ist nämlich $i \in \{1,...,6\}$ vorgegeben und $\sigma_i \in S_6$ ein Element mit $\phi(\sigma_i)(P_1) = \sigma_i P_1 \sigma_i^{-1} = P_i$, dann ist $\tau = (\alpha \circ \phi)(\sigma_i)$ nach Definition von α ein Element aus U mit $\tau(1) = i$.

zu (c) Jedem Element $\sigma \in S_5$ kann ein Element $\tilde{\sigma} \in S_6$ zugeordnet werden, indem man $\tilde{\sigma}(i) = \sigma(i)$ für $1 \le i \le 5$ und $\tilde{\sigma}(6) = 6$ setzt. Offenbar ist mit σ auch $\tilde{\sigma}$ bijektiv. Die Abbildung $\psi : S_5 \to S_6$, $\sigma \mapsto \tilde{\sigma}$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Sind nämlich $\sigma, \tau \in S_5$ vorgegeben und setzen wir $\rho = \sigma \circ \tau$, dann gilt $(\tilde{\sigma} \circ \tilde{\tau})(i) = \tilde{\sigma}(\tilde{\tau}(i)) = \tilde{\sigma}(\tau(i)) = \sigma(\tau(i)) = (\sigma \circ \tau)(i) = \rho(i) = \tilde{\rho}(i)$ für $1 \le i \le 5$ und $(\tilde{\sigma} \circ \tilde{\tau})(6) = \tilde{\sigma}(\tilde{\tau}(6)) = \tilde{\sigma}(6) = 6 = \tilde{\rho}(6)$. Daraus folgt $\psi(\sigma \circ \tau) = \psi(\rho) = \tilde{\rho} = \tilde{\sigma} \circ \tilde{\tau} = \psi(\sigma) \circ \psi(\tau)$. Darüber hinaus ist ψ injektiv. Ist nämlich σ im Kern von ψ enthalten, dann ist $\tilde{\sigma} = \psi(\sigma)$ das Neutralelement in S_6, also die Identität. Es gilt also $\tilde{\sigma}(i) = i$ für $1 \le i \le 6$ und damit $\sigma(i) = i$ für $1 \le i \le 5$, also $\sigma = \mathrm{id}$.

Dies zeigt, dass $V = \psi(S_5)$ eine zu S_5 isomorphe Untergruppe von S_6 ist. Diese operiert nicht transitiv auf M_6. Andernfalls gäbe es ein $\sigma \in S_5$ mit $\psi(\sigma)(1) = \tilde{\sigma}(1) = 6$, was aber der Definition von $\tilde{\sigma}$ widerspricht. Wäre nun V und die Untergruppe von U aus Teil (b) zueinander konjugiert, dann würde daraus aber die Transitivität von V folgen. Um dies zu sehen, sei $\sigma \in S_6$ ein Element mit $V = \sigma U \sigma^{-1}$. Für vorgegebenes $i \in M_6$ müssen wir zeigen, dass ein $\tau \in V$ mit $\tau(1) = i$ existiert. Weil U auf M_6

transitiv operiert, gibt es ein $\rho \in U$ mit $\rho(\sigma^{-1}(1)) = \sigma^{-1}(i)$. Setzen wir nun $\tau = \sigma \circ \rho \circ \sigma^{-1}$, dann gilt tatsächlich $\tau(1) = (\sigma \circ \rho \circ \sigma^{-1})(1) = (\sigma \circ \rho)(\sigma^{-1}(1)) = \sigma(\sigma^{-1}(i)) = i$. Weil aber V, wie bereits gezeigt, nicht transitiv ist, sind die Untergruppen U und V von S_6 nicht zueinander konjugiert.