Aufgabe F17T3A1 (12 Punkte)

Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und

$$G \quad = \quad \mathrm{SL}_n(K) \quad = \quad \{A \in \mathcal{M}_{n,K} \mid \det(A) = 1\}$$

die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit Einträgen aus K und Determinante 1. Wir betrachten die Abbildung

$$F : \mathcal{M}_{n,K} \longrightarrow \mathcal{M}_{n,K} \quad , \quad (a_{ij}) \mapsto (a_{ij}^p).$$

Zeigen Sie, dass $F(G) \subseteq G$ gilt und dass $F|_G : G \to G$ ein Homomorphismus von Gruppen ist. Folgern Sie daraus, dass $H = \{g \in G \mid F(g) = g\}$ eine Untergruppe von G ist, und bestimmen Sie diese Untergruppe.

Lösung:

Sei $A = (a_{ij}) \in G$ und $B = F(A)$. Dann sind die Einträge b_{ij} von B durch $b_{ij} = a_{ij}^p$ für $1 \leq i, j \leq n$. Auf Grund der Leibnizformel und der Rechenregel $(a + b)^p = a^p + b^p$ in einem Körper der Charakteristik p erhalten wir

$$\det(B) \quad = \quad \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} b_{i\sigma(i)} \quad = \quad \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}^p \quad =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)^p \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \right)^p \quad = \quad \left(\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \right)^p \quad = \quad \det(A)^p \quad = \quad 1^p \quad = \quad 1$$

und somit $B \in G$. Damit ist $F(G) \subseteq G$ nachgewiesen. Zu beachten ist, dass die Gleichung $\mathrm{sgn}(\sigma)^p = \mathrm{sgn}(\sigma)$ sowohl für $p = 2$ als auch für $p > 2$ erfüllt ist, weil $\mathrm{sgn}(\sigma)$ nur die Werte ± 1 annimmt.

Seien nun $A, B \in G$ vorgegeben, außerdem $U = F(A)$, $V = F(B)$ und $W = F(AB)$. Zu zeigen ist $F(AB) = F(A)F(B)$, also $W = UV$. Wir bezeichnen die Einträge von A, B, U, V, W mit $a_{ij}, b_{ij}, u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}$. Für $1 \leq i, j \leq n$ müssen wir $w_{ij} = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} v_{kj}$ nachweisen, denn die Summe auf der rechten Seite der Gleichung ist der Eintrag der Matrix UV an der Position (i, j). Der Eintrag von AB an der Position (i, j) ist gegeben durch $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, der Eintrag von $W = F(AB)$ an dieser Stelle ist somit gegebe durch

$$w_{ij} \quad = \quad \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)^p \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^p b_{kj}^p.$$

Wegen $U = F(A)$ und $V = F(B)$ gilt andererseits

$$\sum_{k=1}^{n} u_{ik} v_{kj} \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^p b_{kj}^p.$$

Damit ist die Gleichung bewiesen, und somit ist $F|_G$ tatsächlich ein Gruppenhomomorphismus $G \to G$.

Nun weisen wir die Untergruppen-Eigenschaft der Teilmenge $H \subseteq G$ nach. Weil $F|_G : G \to G$ ein Gruppenhomomorphismus ist, wird das Neutralement I von G von F auf I abgebildet. Aus $F(I) = I$ folgt $I \in H$. Seien nun $A, B \in H$ vorgegeben. Dann gilt $F(A) = A$ und $F(B) = B$. Wiederum auf Grund der Homomorphismus-Eigenschaft erhalten wir $F(AB) = F(A)F(B) = AB$ und $F(A^{-1}) = F(A)^{-1} = A^{-1}$, also $AB \in H$ und $A^{-1} \in H$.

Wegen $\mathrm{char}(K) = p$ ist der Primkörper von K laut Vorlesung isomorph zu $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. O.B.d.A. können wir also $\mathbb{F}_p \subseteq K$ annehmen. Aus der Vorlesung ist auch bekannt, dass die Nullstellen des Polynoms $x^p - x$ in K genau die Element von $\mathbb{F}_p$ sind. Sei nun $A = (a_{ij}) \in G$. Dann ist $A \in H$ äquivalent zu $F(A) = A$ und zu $a_{ij}^p = a_{ij}$ für $1 \leq i, j \leq n$. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Einträge a_{ij} alles Nullstellen von $x^p - x$ sind, also in $\mathbb{F}_p$ liegen. Es gilt also $H = \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_p)$.