Aufgabe F17T2A5 (12 Punkte)

Sei $K|\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung vom Grad 55 mit nicht abelscher Galoisgruppe. Zeigen Sie: Es gibt genau einen echten Zwischenkörper L von $K|\mathbb{Q}$, so dass $L|\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist. Berechnen Sie $[L : \mathbb{Q}]$.

Lösung:

Sei $G = \mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$. Dann gilt $|G| = [K : \mathbb{Q}] = 55 = 5 \cdot 11$. Für $p \in \{5, 11\}$ sei ν_p jeweils die Anzahl der p-Sylowgruppen. Auf Grund der Sylowsätze gilt $\nu_{11} \mid 5$, also $\nu_{11} \in \{1, 5\}$, und außerdem $\nu_{11} \equiv 1 \bmod 11$. Wegen $5 \not\equiv 1 \bmod 11$ muss also $\nu_{11} = 1$ gelten. Weiter gilt $\nu_5 \mid 11$, also $\nu_5 \in \{1, 11\}$.

Betrachten wir zunächst den Fall $\nu_5 = 1$. Es sei P die einzige 5- und Q die einzige 11-Sylowgruppe. Wir zeigen, dass G ein inneres direktes Produkt von P und Q ist. Weil 5^1 und 11^1 die höchsten Potenzen von 5 bzw. 11 sind, welche die Gruppenordnung 55 teilen, gilt $|P| = 5$ und $|Q| = 11$. Weil diese Zahlen teilerfremd sind, gilt $P \cap Q = \{\mathrm{id}\}$. Als einzige Sylowgruppen sind P und Q Normalteiler von G. Daraus folgt auch, dass $H = PQ$ eine Untergruppe von G ist. Wegen $P \subseteq H$ und $Q \subseteq H$ sind $|P| = 5$ und $|Q| = 11$ beides Teiler von $|H|$. Auf Grund der Teilerfremdheit von 5 und 11 folgt $55 \mid |H|$, insbesondere also $|H| \geq 55 = |G|$. Zusammen mit $H \subseteq G$ folgt daraus $G = H = PQ$.

Damit ist gezeigt, dass G tatsächlich ein inneres direktes Produkt von P und Q ist. Laut Vorlesung folgt daraus $G \cong P \times Q$. Als Gruppen von Primzahlordnung sind P und Q zyklisch, insbesondere abelsch. Also ist auch $P \times Q$ und damit auch G abelsch. Aber dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung, dass G keine abelsche Gruppe ist. Also kann der Fall $\nu_5 = 1$ nicht auftreten.

Es muss also $\nu_5 = 11$ gelten. Wie oben sei Q die einzige 11-Sylowgruppe, und wir bezeichnen mit $L = K^Q$ den zugehörigen Fixkörper. Als einzige 11-Sylowgruppe ist Q Normalteiler von G, und auf Grund der Zusatzaussagen zum Hauptsatz der Galoistheorie ist folglich $L|\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung. Es gilt $[L : \mathbb{Q}] = (G : Q) = \frac{|G|}{|Q|} = \frac{55}{11} = 5$; wegen $1 < 5 < [K : \mathbb{Q}] = 55$ zeigt dies auch, dass L ein echter Zwischenkörper von $K|\mathbb{Q}$ ist.

Nehmen wir nun an, dass L_1 ein weiterer echter Zwischenkörper von $K|\mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft ist, dass es sich bei $L_1|\mathbb{Q}$ um eine Galoiserweiterung handelt. Nach der Gradformel ist $[L_1 : \mathbb{Q}]$ ein Teiler von $[K : \mathbb{Q}] = 55$. In den Fällen $[L_1 : \mathbb{Q}] = 1$ bzw. $[L_1 : \mathbb{Q}] = 55$ wäre $L_1 = \mathbb{Q}$ bzw. $L_1 = K$, im Widerspruch dazu, dass L_1 ein echter Zwischenkörper der Erweiterung sein soll. Also bleibt nur $[L_1 : \mathbb{Q}] \in \{5, 11\}$. Im Fall $[L_1 : \mathbb{Q}] = 11$ wäre $H = \mathrm{Gal}(K|L_1)$ eine Untergruppe von G von Index 11, also von Ordnung 5. Weil $L_1|\mathbb{Q}$ galoissch ist, handelt es sich bei H um einen Normalteiler von G. Ab dies würde $\nu_5 = 1$ bedeuten, denn eine 5-Sylowgruppe von G ist nur dann Normalteiler, wenn sie die einzige 5-Sylowgruppe von G ist. Es muss also $[L_1 : \mathbb{Q}] = 5$ gelten. In diesem Fall ist H eine Untergruppe von Index 5 und Ordnung 11. Also ist H die einzige 11-Sylowgruppe von G. Es folgt $\mathrm{Gal}(K|L_1) = H = \mathrm{Gal}(K|L)$, und auf Grund der Bijektivität im Hauptsatz der Galoistheorie folgt $L_1 = L$. Daraus folgt, dass der Körper L mit den angegebenen Eigenschaften eindeutig bestimmt ist.