Aufgabe F17T2A4 (12 Punkte)

Sei $f = x^3 + 2x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ und sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f.

(a) Zeigen Sie: $1, \alpha, \alpha^2$ ist eine Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}(\alpha)$.

(b) Schreiben Sie $(1+\alpha)^{-1}$ als Linearkombination mit rationalen Koeffizienten bezüglich dieser Basis.

Lösung:

zu (a) Das Polynom f ist irreduzibel nach dem Eisenstein-Kriterium (angewendet auf die Primzahl $p = 2$), und es hat α als Nullstelle. Somit gilt laut Vorlesung $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \mathrm{grad}(f) = 3$, und $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ ist eine Basis von $\mathbb{Q}(\alpha)$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

zu (b) Wegen $(1+\alpha)^{-1} \in \mathbb{Q}(\alpha)$, und weil $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ nach (a) eine Basis von $\mathbb{Q}(\alpha)$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist, gibt es Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{Q}$ mit $(1+\alpha)^{-1} = a+b\alpha+c\alpha^2$. Wegen $f(\alpha) = \alpha^3+2\alpha+2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 = -2-2\alpha$ gilt

$$1 \cdot 1 + 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \alpha^2 \quad = \quad 1 \quad = \quad (1+\alpha)^{-1}(1+\alpha) \quad = \quad (a + b\alpha + c\alpha^2)(1+\alpha) \quad =$$
$$a + b\alpha + c\alpha^2 + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 \quad = \quad a + b\alpha + c\alpha^2 + a\alpha + b\alpha^2 + c(-2-2\alpha) \quad =$$
$$(a-2c) + (b-2c+a)\alpha + (b+c)\alpha^2.$$

Durch Koeffizientenvergleich (der auf Grund der linearen Unabhängigkeit von $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ zulässig ist) erhalten wir $a - 2c = 1$, $b - 2c + a = 0$, $b + c = 0$. Einsetzen von $c = -b$ in die ersten beiden Gleichungen liefert $a+2b = 1$, $3b+a = 0$. Subtrahieren wir diese beiden Gleichungen, dann folgt $b = -1$, und einsetzen liefert $a = 3$ und $c = 1$. Die gesuchte Darstellung ist also $(1+\alpha)^{-1} = 3 \cdot 1 - \alpha + \alpha^2$.