Aufgabe F17T2A1 (12 Punkte)

Wie viele Elemente der Ordnung 11 gibt es in einer einfachen Gruppe der Ordnung 660?

Lösung:

Sei G eine einfache Gruppe der Ordnung $660 = 6 \cdot 10 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ und ν_{11} die Anzahl der 11-Sylowgruppen. Auf Grund der Sylowsätze gilt $\nu_{11} \mid 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, also $\nu_{11} \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$. Außerdem gilt $\nu_{11} \equiv 1 \bmod 11$. Offenbar sind die Zahlen $2, 3, 4, 5, 6, 10$ nicht kongruent zu 1 modulo 11, ebenso die Zahlen $15, 20, 30, 60$ nicht wegen $15 \equiv 4 \bmod 11$, $20 \equiv 9 \bmod 11$, $30 \equiv 8 \bmod 11$, $60 \equiv 5 \bmod 11$. Somit gilt $\nu_{11} \in \{1, 12\}$. Wäre $\nu_{11} = 1$ und P die einzige 11-Sylowgruppe, dann wäre P laut Sylowsätzen ein Normalteiler von G, wegen $|P| = 11$ und $1 < |P| < |G|$ sogar ein echter Normalteiler. Aber dies widerspricht der Annahme, dass G eine einfache Gruppe ist.

Also muss $\nu_{11} = 12$ gelten. Weil 11 eine Primzahl ist und $|P| = 11$ für jede 11-Sylowgruppe P gilt, ist jedes solche P zyklisch von Ordnung 11 und enthält genau $\varphi(11) = 10$ Elemente der Ordnung 11. Umgekehrt liegt jedes Element g mit $\mathrm{ord}(g) = 11$ in genau einer 11-Sylowgruppe, nämlich in der 11-elementigen Gruppe $\langle g \rangle$. Insgesamt gibt es also genau 10-mal soviele Elemente der Ordnung 11 wie 11-Sylowgruppen. Die gesuchte Elementezahl ist also gegegen durch $10\nu_{11} = 120$.