Aufgabe F17T1A5 (12 Punkte)

Es seien p eine Primzahl und $\bar{\mathbb{F}}_p$ ein algebraischer Abschluss des endlichen Körpers $\mathbb{F}_p$ mit p Elementen. Für $r \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathbb{F}_{p^r} \subseteq \bar{\mathbb{F}}_p$ den Zwischenkörper mit p^r Elementen. Zeigen Sie:

(a) Ist $n \in \mathbb{N}$ und A eine $n \times n$-Matrix mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$, so dass das charakteristische Polynom von A irreduzibel über $\mathbb{F}_p$ ist, so ist A über dem Körper $\mathbb{F}_{p^n}$ diagonalisierbar.

(b) Für $p = 5$ ist die 3×3-Matrix

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nicht über $\mathbb{F}_{125}$ diagonalisierbar, aber über $\mathbb{F}_{25}$.

Lösung:

zu (a) Laut Vorlesung ist A genau dann diagonalisierbar über $\mathbb{F}_{p^n}$, wenn das charakteristische Polynom χ_A über $\mathbb{F}_{p^n}$ in Linearfaktoren zerfällt und für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{F}_{p^n}$ von A die geometrische Vielfachheit $\mu_g(A, \lambda)$ mit der algebraischen Vielfachheit $\mu_a(A, \lambda)$ übereinstimmt. Außerdem sind die Eigenwerte genau die Nullstellen von χ_A in $\mathbb{F}_{p^n}$.

Ist nun $\alpha \in \bar{\mathbb{F}}_p$ eine Nullstelle von χ_A, dann gilt auf Grund der Irreduzibilität $[\mathbb{F}_p(\alpha) : \mathbb{F}_p] = \operatorname{grad}(\chi_A) = n$. Also ist $\mathbb{F}_p(\alpha)$ aus $\mathbb{F}_p$-Vektorraums isomorph zu $\mathbb{F}_p^n$. Es folgt $|\mathbb{F}_p(\alpha)| = |\mathbb{F}_p^n| = p^n$ und somit $\mathbb{F}_p(\alpha) = \mathbb{F}_{p^n}$, insbesondere ist jede Nullstelle $\alpha \in \bar{\mathbb{F}}_p$ von χ_A in $\mathbb{F}_{p^n}$ enthalten. Dies zeigt, dass χ_A über $\mathbb{F}_{p^n}$ in Linearfaktoren zerfällt.

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass jedes irreduzible Polynom über einem endlichen Körper separabel ist. Also besitzt χ_A in $\mathbb{F}_{p^n}$ nur einfache Nullstellen, es gilt also $\mu_a(A, \lambda) = 1$ für jeden Eigenwert λ von A. Weil außerdem laut Vorlesungen $1 \le \mu_g(A, \lambda) \le \mu_a(A, \lambda)$ für jeden Eigenwert λ gilt, erhalten wir $\mu_g(A, \lambda) = 1 = \mu_a(A, \lambda)$ für jeden Eigenwert λ. Damit ist die Diagonalisierbarkeit insgesamt nachgewiesen.

zu (b) Zunächst berechnen wir das charakteristische Polynom χ_A. Es gilt

$$\chi_A \quad = \quad \det \begin{pmatrix} x+1 & -3 & 1 \\ 0 & x & -1 \\ -1 & 0 & x \end{pmatrix} \quad = \quad (x+1) \cdot x \cdot x + (-3) \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 - (-1) \cdot x \cdot 1 - 0 - 0$$

$$= \quad (x^3 + x^2) + 2 + x \quad = \quad x^3 + x^2 + x + 2.$$

Das Polynom $f = \chi_A$ hat 1 als Nullstelle, und Polynomdivision liefert $f = (x-1)(x^2 + 2x + 3)$. Das Polynom $g = x^2 + 2 + 3$ besitzt in $\mathbb{F}_5$ keine Nullstellen, denn es ist $g(0) = 3$, $g(1) = 1$, $g(2) = 1$, $g(3) = 3$, $g(4) = 2$. Als irreduzibles Polynom vom Grad 2 ist g separabel, besitzt also in $\bar{\mathbb{F}}_5$ zwei verschiedene Nullstellen, die wir mit α und β bezeichnen. Auf Grund der Irreduzibilität und Normiertheit ist g das Minimalpolynom von α über $\mathbb{F}_5$. Es folgt $[\mathbb{F}_5(\alpha) : \mathbb{F}_5] = \operatorname{grad}(g) = 2$, und wie oben folgt daraus $\mathbb{F}_5(\alpha) = \mathbb{F}_{25}$. Ebenso erhält man $\mathbb{F}_5(\beta) = \mathbb{F}_{25}$. Dies zeigt, dass χ_A in $\mathbb{F}_{25}$ die drei verschiedenen Nullstellen $1, \alpha, \beta$ besitzt. Das Polynom χ_A zerfällt also über $\mathbb{F}_{25}$ in Linearfaktoren. Weil es sich um einfache Nullstellen handelt, erhalten wir wie in Teil (a) $\mu_g(A, 1) = 1 = \mu_a(A, 1)$, ebenso für die Nullstellen α, β. Damit ist die Diagonalisierbarkeit von A über $\mathbb{F}_{25}$ nachgewiesen.

Wäre A auch über $\mathbb{F}_{125}$ diagonalisierbar, dann müsste f und damit auch g über $\mathbb{F}_{125}$ in Linearfaktoren zerfallen. Es wäre dann $\alpha \in \mathbb{F}_{125}$ und $\mathbb{F}_{5^2} = \mathbb{F}_{25} = \mathbb{F}_5(\alpha)$ ein Teilkörper von $\mathbb{F}_{5^3} = \mathbb{F}_{125}$. Aber laut Vorlesung ist für $m, n \in \mathbb{N}$ der Körper $\mathbb{F}_{5^m}$ nur dann ein Teilkörper von $\mathbb{F}_{5^n}$, wenn m ein Teiler von n ist. Wegen $2 \nmid 3$ ist dies hier nicht der Fall. Also ist A über $\mathbb{F}_{125}$ nicht diagonalisierbar.