Aufgabe F17T1A3 (12 Punkte)

Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe der Ordnung 300 gibt.
Hinweis: Nehmen Sie an, es gäbe so eine Gruppe, und lassen Sie diese auf ihren 5-Sylowgruppen operieren.

Lösung:

Sei G eine Gruppe der Ordnung $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, und für jede Primzahl p sei ν_p die Anzahl der p-Sylowgruppen von G. Auf Grund der Sylowsätze gilt $\nu_5 \mid 2^2 \cdot 3$, also $\nu_5 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, und auërdem $\nu_5 \equiv 1 \bmod 5$. Wegen $n \not\equiv 1 \bmod 5$ für $n \in \{2, 3, 4, 12\}$ folgt $\nu_5 \in \{1, 6\}$. Ist $\nu_5 = 1$ und P die einzige 5-Sylowgruppe von G, dann ist P ein Normalteiler von G. Wegen $|P| = 5^2$ gilt außerdem $\{e\} \subsetneq P \subsetneq G$. Somit wäre P sogar *nichttrivialer* Normalteiler von G und die Gruppe G somit nicht einfach.

Betrachten wir nun den Fall $\nu_5 = 6$. Sei X die 6-elementige Menge der 5-Sylowgruppen von G. Die Operation von G auf X durch Konjugation (die wir mit $\cdot$ bezeichnen) liefert laut Vorlesung einen Gruppenhomomorphismus $\alpha : G \to \mathrm{Per}(X)$ mit $\alpha(g)(P) = g \cdot P = gPg^{-1}$ für alle $g \in G$ und $P \in X$. Laut Vorlesung ist $N = \ker(\alpha)$ als Kern eines Homomorphismus ein Normalteiler von G. Ist N ein nichttrivialer Normalteiler, ist G auch in diesem Fall keine einfache Gruppe. Andernfalls wäre $N = \{e\}$ oder $N = G$.

Im Fall $N = \{e\}$ wäre α injektiv. Dann wäre $\alpha(G)$ eine zu G isomorphe Untergruppe von $\mathrm{Per}(X)$, von Ordnung $|G| = 300$. Nach dem Satz von Lagrange wäre 300 dann ein Teiler der Gruppenordnung $|\mathrm{Per}(X)|$. Aber wegen $|X| = 6$ ist $\mathrm{Per}(X)$ isomorph zur symmetrischen Gruppe S_6 und somit $|\mathrm{Per}(X)| = |S_6| = 6! = 720$. Die Zahl 300 ist kein Teiler von 720. Damit ist der Fall $N = \{e\}$ ausgeschlossen.

Betrachten wir nun noch den Fall $N = G$. Dann würde α jedes Element aus G auf das Neutralelement id_X von $\mathrm{Per}(X)$ abbilden. Daraus würde $gPg^{-1} = g \cdot P = \alpha(g)(P) = \mathrm{id}_X(P) = P$ für alle $g \in G$ und alle $P \in X$ folgen. Jede 5-Sylowgruppe P wäre also ein Normalteiler von G. Aber dies ist laut Vorlesung nur möglich, wenn $\nu_5 = 1$ ist. Also ist auch $N = G$ ausgeschlossen.