Aufgabe F16T3A3 (10 Punkte)

Sei p eine Primzahl, die die Ordnung der endlichen Gruppe G teilt. Weiter sei P eine zyklische p-Sylowgruppe von G. Man zeige:

(a) P enthält genau eine Untergruppe der Ordnung p.

(b) Es gelte $|P \cap x^{-1}Px| > 1$ für alle $x \in G$. Man zeige, dass G einen Normalteiler N hat mit $|N| = p^e$ mit $e \in \mathbb{N}$.

Lösung:

zu (a) Nach Voraussetzungen kann die Gruppenordung $n = |G|$ in der Form $n = p^r m$ mit $r, m \in \mathbb{N}$ geschrieben werden, wobei $p \nmid m$ gilt. Nach Definition der Sylowgruppen gilt $|P| = p^r$, somit ist p ein Teiler der Gruppenordung $|P|$. Da P zyklisch ist, besitzt P für jedes $d \in \mathbb{N}$, das $|P|$ teilt, genau eine Untergruppe der Ordnung d, also auch für $d = p$.

zu (b) Sei U die eindeutig bestimmte Untergruppe U von P mit $|U| = p$ aus Aufgabenteil (a). Zunächst zeigen wir, dass $U \subseteq x^{-1}Px$ für alle $x \in G$ gilt. Sei dazu $x \in G$ beliebig vorgegeben. Als Untergruppe der zyklischen Gruppe P ist $P_x = P \cap x^{-1}Px$ ebenfalls zyklisch, außerdem ist $|P_x|$ ein Teiler von $|P| = p^r$, und laut Angabe gilt $|P_x| > 1$. Dies zeigt, dass p ein Teiler von $|P_x|$ ist. Wie in Teil (a) folgt daraus, dass P_x eine eindeutig bestimmte Untergruppe V der Ordnung p besitzt. Wegen $V \subseteq P_x \subseteq P$ und der Eindeutigkeit der Untergruppe U muss $V = U$ gelten. Damit ist $U \subseteq P_x \subseteq x^{-1}Px$ nachgewiesen.

Nun zeigen wir, dass $N = \bigcap_{x \in G} x^{-1}Px$ ein Normalteiler von G ist. Für jedes $g \in G$ gilt jeweils

$$gNg^{-1} \quad = \quad \bigcap_{x \in G} gx^{-1}Pxg^{-1} \quad = \quad \bigcap_{x \in G} (xg^{-1})^{-1}P(xg^{-1}) \quad = \quad \bigcap_{x \in G} x^{-1}Px \quad = \quad N \quad ,$$

wobei im vorletzten Schritt verwendet wurde, dass mit x auch xg^{-1} die gesamte Gruppe G durchläuft. Damit ist die Normalteiler-Eigenschaft nachgewiesen. Wegen $U \subseteq x^{-1}Px$ für alle $x \in G$ gilt $U \subseteq N$. Also ist $|U| = p$ ein Teiler von $|N|$. Andererseits folgt aus $N \subseteq P$, dass $|N|$ ein Teiler von $|P| = p^r$ ist. Insgesamt erhalten wir $|N| = p^e$ für ein $e \in \mathbb{N}$ mit $e \leq r$.