Aufgabe F16T2A5 (12 Punkte)

Es sei $M_4(\mathbb{Q})$ der Ring der 4×4-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Q}$. Sei

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \in M_4(\mathbb{Q}).$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_A sowie die Eigenwerte von A.
Ist A diagonalisierbar?

(b) Berechnen Sie das Ideal $J_A = \{g \in \mathbb{Q}[x] \mid g(A) = 0\}$.

Lösung:

zu (a) Durch wiederholte Anwendung des Laplaceschen Entwicklungssatzes erhalten wir

$$\chi_A \quad = \quad \det(xE_4 - A) \quad = \quad \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 1 & x+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x+1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & x+1 \end{vmatrix} \quad = \quad (-1)^{4+4}(x+1) \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 1 & x+2 & 0 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$= \quad (-1)^{3+3}(x+1)^2 \begin{vmatrix} x & -1 \\ 1 & x+2 \end{vmatrix} \quad = \quad (x-1)^2(x(x+2)+1) \quad = \quad (x+1)^2(x^2+2x+1)$$

$$= \quad (x+1)^2(x+1)^2 \quad = \quad (x+1)^4.$$

Also ist -1 die einzige Nullstelle von χ_A und somit der einzige Eigenwert von A. Laut Vorlesung ist A genau dann (über $\mathbb{Q}$) diagonalisierbar, wenn χ_A in $\mathbb{Q}[x]$ in Linearfaktoren zerfällt und für jeden Eigenwert die algebraische mit der geometrischen Vielfachheit übereinstimmt. Das Ersteres der Fall ist, hat unsere Rechnung bereits gezeigt. Da -1 der einzige Eigenwert von A ist, genügt es also, die geometrische Vielfachheit $\mu_g(A,-1)$ dieses Eigenwerts mit der algebraischen Vielfachheit $\mu_a(A,-1)$ zu vergleichen. Weil -1 als Nullstelle von χ_A die Vielfachheit 4 hat, gilt $\mu_a(A,-1) = 4$. Wir bestimmen nun $\mu_g(A,-1)$. Bezeichnet E_4 die Einheitsmatrix in $\mathcal{M}_{4,\mathbb{Q}}$, dann gilt

$$A - (-1)E_4 \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen den Rang dieser Matrix mit dem Gauß-Algorithmus. Die Rechnung

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zeigt, dass $\operatorname{rg}(A-(-1)E_4) = 2$ ist, und mit dem Dimensionssatz für lineare Abbildung folgt $\mu_g(A,-1) = \dim \operatorname{Eig}(A,-1) = \dim \ker(A-(-1)E_4) = 4-2 = 2$. Es gilt also $\mu_g(A,-1) \neq \mu_a(A,-1)$, und folglich ist A nicht diagonalisierbar.

zu (b) Da $\mathbb{Q}[x]$ ein Hauptidealring ist, existiert ein normiertes Polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$ mit $J_A = (f)$. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt $\chi_A(A) = 0$, also liegt $\chi_A = (x+1)^4$ in J_A. Aus $((x+1)^4) \subseteq J_A = (f)$ folgt, dass f ein normierter Teiler von $(x+1)^4$ ist, also $f = (x+1)^m$ für ein $m \in \{0, 1, ..., 4\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $(x+1)^n \in J_A$ genau dann, wenn $(x+1)^m$ ein Teiler von $(x+1)^n$ ist, was wiederum zu $n \geq m$ äquivalent ist. Also ist m die kleinste natürliche Zahl n mit $(x+1)^n \in J_A$.

$$A + 1 \cdot E_4 \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

und durch Quadrieren dieser Matrix erhält man $(A + E_4)^2 = 0$. Also gilt $x + 1 \notin J_A$ und $(x+1)^2 \in J_A$. Wir erhalten $m = 2$, also $J_A = ((x+1)^2)$.