Aufgabe F16T2A4 (12 Punkte)

Sei $f = x^3 - x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ und $a \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f. Sei $b = 2a^2 - a - 2$.

(a) Zeigen Sie, dass f irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $b \neq 0$ gilt.

(c) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von a^2 über $\mathbb{Q}$.

Lösung:

zu (a) Wegen $\mathrm{grad}(f) = 3$ ist das Polynom f über $\mathbb{Q}$ genau dann irreduzibel, wenn es über $\mathbb{Q}$ keine Nullstelle besitzt. Da f ganzzahlig und normiert ist, muss auch jede rationale Nullstelle ganzzahlig und ein Teiler des konstanten Terms -1 sein. Also sind ± 1 die einzigen möglichen rationalen Nullstellen von f. Da aber $f(-1) = -1 \neq 0$ und $f(1) = -1 \neq 0$ gilt, besitzt f in $\mathbb{Q}$ keine Nullstellen.

zu (b) Das Polynom f ist normiert, irreduzibel und hat a als Nullstelle. Somit handelt es sich bei f um das Minimalpolynom von a. Dies bedeutet, dass kein Polynom kleineren Grades existiert, dass a als Nullstelle hat und ungleich Null ist. Wäre $b = 2a^2 - a - 2$ gleich Null, dann wäre durch $g = 2x^2 - x - 2$ ein Polynom mit $\mathrm{grad}(g) < \mathrm{grad}(f)$ und mit a als Nullstelle gegeben.

zu (c) Weil a^2 im Körper $\mathbb{Q}(a)$ liegt, muss $[\mathbb{Q}(a^2) : \mathbb{Q}] \leq [\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = \mathrm{grad}(f) = 3$ gelten. Es existiert also ein normiertes Polynom $g = x^3 + rx^2 + sx + t$ mit $g(a^2) = 0$ und $r, s, t \in \mathbb{Q}$. Wir bestimmen passende Koeffizienten r, s, t. Wegen $a^3 - a - 1 = f(a) = 0$ gilt $a^3 = a + 1$. Daraus folgt $a^4 = a^2 + a$, $a^5 = a^3 + a^2 = a^2 + a + 1$ und $a^6 = a^3 + a^2 + a = a^2 + 2a + 1$. Durch Einsetzen erhalten wir

$$g(a^2) \quad = \quad (a^2)^3 + r(a^2)^2 + s(a^2) + t \quad = \quad a^6 + ra^4 + sa^2 + t \quad =$$

$$(a^2 + 2a + 1) + r(a^2 + a) + sa^2 + t \quad = \quad (r + s + 1)a^2 + (r + 2)a + (t + 1).$$

Die Gleichung $(r + s + 1)a^2 + (r + 2)a + (t + 1) = g(a^2) = 0$ liefert $r + s + 1 = 0$, $r + 2 = 0$, $t + 1 = 0$, was zu $r = -2$, $t = -1$, $s = 1$ aufgelöst werden kann. Also ist $g = x^3 - 2x^2 + x - 1$ ein Polynom mit a^2 als Nullstelle. Außerdem ist g irreduzibel: Wegen $\mathrm{grad}(g) = 3$ ist dies äquivalent dazu, dass g in $\mathbb{Q}$ keine Nullstelle besitzt. Wegen $g \in \mathbb{Z}[x]$ müsste diese Nullstelle ganzzahlig und ein Teiler von -1 sein. Es gilt aber $g(-1) = -5 \neq 0$ und $g(1) = -1 \neq 0$, also hat g keine rationale Nullstelle. Insgesamt ist g also irreduzibel, normiert und es gilt $g(a^2) = 0$. Damit ist g das Minimalpolynom von a^2 über $\mathbb{Q}$.